

TS 94/GRE1/0027

double

TS 94 / GREI / 0027

DOUBLE S&P

CRS

B.U.S. GRENOBLE



052 0642746

D

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

# **LABORATOIRE DE GLACIOLOGIE ET GÉOPHYSIQUE DE L'ENVIRONNEMENT**

Associé à l'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I



ETUDE NUMERIQUE ET MATHEMATIQUE DES TRANSITIONS

ABRUPTES "FORT FROTTEMENT - FAIBLE FROTTEMENT" :

APPLICATION AUX TRANSITIONS "CALOTTES POLAIRES - ICE SHELF"

**Renaud LESTRINGANT**

Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier-Grenoble I  
(Arrêtés Ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992)  
Spécialité : Mécanique

Soutenue le 23 Février 1994 devant la commission d'examen composée de :

M. Duval	Président
M. Minster	Rapporteur
Mme Dauge	Rapporteur
M. Le Dimet	Examineur
M. Benoist	Directeur de thèse
Melle Ritz	Directeur de thèse

Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement  
Tél. (33) 76.82.42.00. - Fax (33) 76.82.42.01.  
54, Rue Molière - BP96 - 38402 Saint Martin d'Hères Cedex France





CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

# LABORATOIRE DE GLACIOLOGIE ET GÉOPHYSIQUE DE L'ENVIRONNEMENT

Associé à l'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I



ETUDE NUMERIQUE ET MATHEMATIQUE DES TRANSITIONS

ABRUPTES "FORT FROTTEMENT - FAIBLE FROTTEMENT" :

APPLICATION AUX TRANSITIONS "CALOTTES POLAIRES - ICE SHELF"

Renaud LESTRINGANT

Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier-Grenoble I  
(Arrêtés Ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992)  
Spécialité : Mécanique

Soutenue le 23 Février 1994 devant la commission d'examen composée de :

M. Duval	Président
M. Minster	Rapporteur
Mme Dauge	Rapporteur
M. Le Dimet	Examineur
M. Benoist	Directeur de thèse
Melle Ritz	Directeur de thèse

Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement  
Tél. (33) 76.82.42.00. - Fax (33) 76.82.42.01.  
54, Rue Molière - BP96 - 38402 Saint Martin d'Hères Cedex France



Si haut que l'on soit assis, on  
n'est jamais assis que sur son cul

M. E. de Montaigne

**Carpe diem**



Merci à l'ensemble du jury d'avoir accepté de juger la présente thèse.

Merci à Paul Duval de m'avoir pris en DEA et de m'avoir initié à la Glaciologie.

Merci à Catherine Ritz car elle m'a fait confiance.

Merci à Monique Dauge pour notre fructueuse collaboration sans laquelle le chapitre V ne serait qu'une ébauche.

A toi Guillaume, à toi Moïra, à toi Barbara  
A vous trois que j'aime tant



## INTRODUCTION



## INTRODUCTION

Les transitions "fort frottement / faible frottement" sont des phénomènes intervenant dans les écoulements de calottes polaires qui présentent des transitions "calotte / ice streams" et "calotte / ice shelves". Les calottes polaires sont partie intégrante du système climatique terrestre. Leurs évolutions climatiques sont étudiées de façon à connaître leur réponse durant les anciennes glaciations ou bien encore à un possible réchauffement planétaire. Les calottes les plus sensibles semblent être le Laurentide (aujourd'hui disparu il était situé sur le continent Nord-américain) et l'Antarctique. Cette dernière est composée de deux parties, l'Est et l'Ouest, dont les stabilités dynamiques sont supposées être radicalement différentes. Actuellement, la question se pose de savoir si l'Antarctique de l'Ouest présente ou non une stabilité dans l'éventualité d'un réchauffement climatique. Cette stabilité est essentiellement fonction du type de conditions basales existant à l'interface glace-socle rocheux. Selon que le frottement est fort ou faible, la glace s'écoule plus ou moins vite, créant ainsi une vidange plus ou moins forte avec pour conséquence une élévation du niveau marin plus ou moins marquée. Dans ce scénario, les zones de transition jouent un rôle essentiel car la cinématique de leurs emplacements détermine l'évolution de la répartition des zones de frottement faible, voire nul, et par là l'évolution de la vidange par vélage d'icebergs. La réalité n'est surement pas aussi simple.



La modélisation globale des calottes polaires s'intéresse, par nature, aux variations à grande échelle spatiale en utilisant des maillages très lâches. La prise en compte fine de phénomènes à petite échelle tels que les zones de transitions est donc rendue délicate. Diverses approches (C. Ritz [1], P. Huybrechts [2]) ont été utilisées pour traiter le problème plus particulier de la zone de transition "calotte polaire - ice shelf". Les deux auteurs utilisent des modélisations distinctes pour la calotte et pour l'ice shelf. Leur problème est donc de construire un lien entre les deux types de modélisation. Leurs traitements consistent soit à se donner des formes analytiques pour les contraintes (C. Ritz), soit à modifier les équations de bases pour se placer a priori quelque part entre les deux types de modélisation (P. Huybrechts). L'un comme l'autre reconnaissent que ces procédures ad hoc ne sont pas satisfaisantes, voire désastreuses pour la qualité des résultats.

C'est ainsi que si les modélisateurs désirent décrire au mieux ces transitions pour les incorporer dans les modèles globaux de calottes polaires, il est nécessaire de les étudier pour elles-mêmes afin de déterminer les conditions exactes de vitesses, pression et contraintes qui y règnent. Ceci a déjà fait l'objet de quelques travaux (K. Herterich [3], R. Lestringant [4] à paraître).

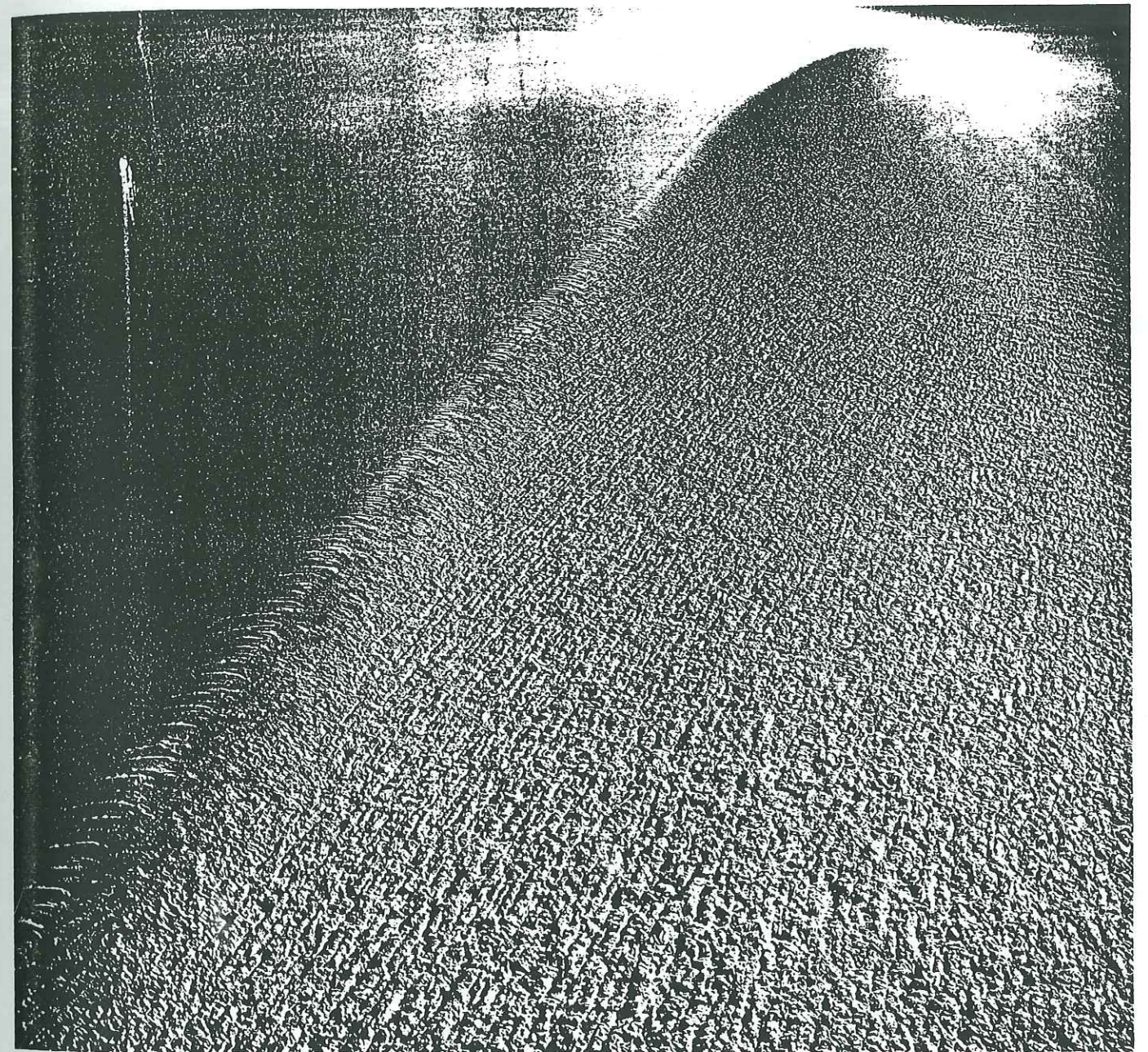
Pour les modélisateurs de calottes polaires, les transitions <sup>1</sup>abruptes posent un problème fondamental : la contrainte de cisaillement présente-t-elle ou non une singularité non-bornée lors du passage entre les deux types de frottement ? Le problème de la transition "no-slip / free-slip" doit permettre de répondre à cette

---

<sup>1</sup> On qualifie d'*abruptes* les transitions pour lesquelles le passage entre la zone de frottement fort et la zone de frottement faible s'effectue au plus sur des distances de l'ordre de l'épaisseur de glace.

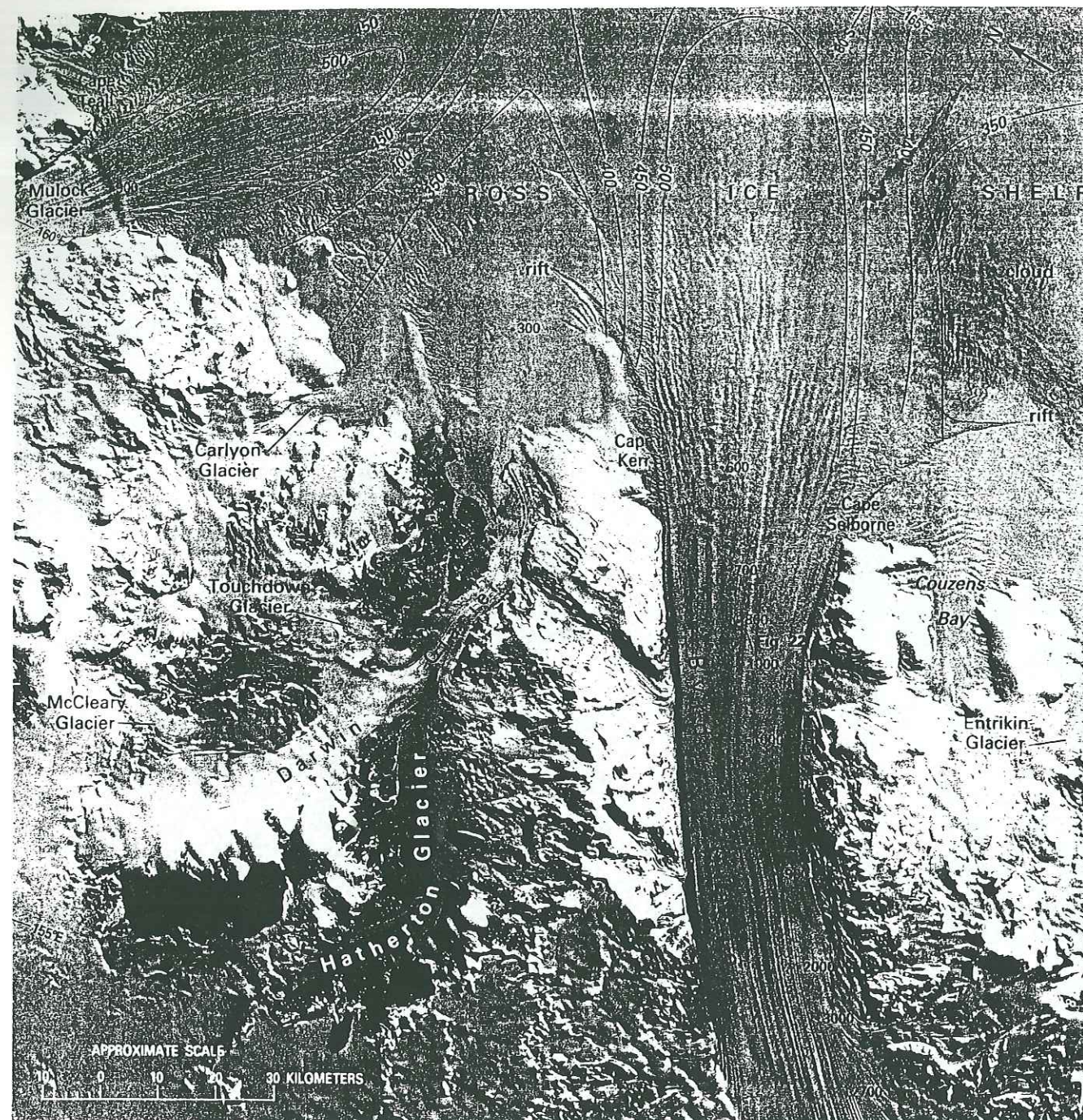


question. L'étude sera menée selon deux voies, l'une numérique, et l'autre mathématique.



*Un exemple de transition abrupte "calotte - ice stream" : bord Nord de l'ice stream B (83°50'S ; 150°W) La transition s'effectue sur un petit peu plus de 100 m.*





# I

## PROBLEMATIQUE DE L'ETUDE

Un exemple de transition "calotte - ice shelf" : le glacier Byrd relie l'Antarctique de l'Ouest à l'ice shelf de Ross à travers le chaîne trans-antarctique.

Introduction



## PROBLEMATIQUE DE L'ETUDE

La jonction "calotte-ice shelf" est le siège du transfert de masses glaciaires entre la calotte et l'ice shelf. Cette définition est déjà en soi une modélisation partielle de la masse de glace. On peut en effet considérer qu'elle est une combinaison de trois types de sous-systèmes : la calotte, l'ice stream, et l'ice shelf. Il est possible de discriminer chacun d'eux par le type de contrainte qui domine l'écoulement. La calotte constitue la plus grande partie en volume de la masse de glace et sa caractéristique essentielle -du moins en ce qui concerne sa dynamique- réside dans le fait qu'elle repose sur un socle rocheux. L'ice shelf quant à lui repose entièrement sur l'océan : il flotte. La troisième composante, l'ice stream, peut être considérée comme un cas intermédiaire entre les deux autres. On est donc amené à distinguer deux types de régimes d'écoulement :

- dans la calotte, un écoulement par cisaillement dû à l'interaction glace-socle rocheux.
- dans l'ice shelf, un écoulement dominé par les contraintes déviatoriques longitudinales ; on obtient alors un écoulement par extension.

La figure I.1 ci-dessous résume cette présentation :

calotte <-----> écoulement par cisaillement
ice shelf <-----> écoulement par extension

Fig. I.1 : *caractérisation mécanique schématique des écoulements au sein d'une masse glaciaire.*

Le cas de l'ice stream relève de la suite du chapitre.

Je qualifierais la description précédente de "description à l'ordre zéro". On doit apporter un certain nombre de corrections -ou plus exactement des variations par rapport aux deux modes principaux- à ce tableau. La principale de ces variations est l'ice stream qui repose sur le socle rocheux, ce qui le classe dans la catégorie "calotte", mais les conditions basales existant à l'interface glace-socle le classent dans la catégorie "shelf". De plus, un ice stream est confiné latéralement par d'autres ice streams ou par la calotte, ce qui fait apparaître des contraintes de cisaillement dans la direction perpendiculaire à celle de l'écoulement à cause de l'action de ses marges latérales. L'influence de ces marges dépendra fondamentalement du rapport d'aspect de l'ice stream "largeur / épaisseur" : plus ce rapport est grand plus l'influence est petite. Il existe d'autres facteurs influençant le type d'écoulement, par exemple : la topographie du socle est très irrégulière (montagnes et fosses) entraînant inévitablement une part plus active des contraintes déviatoriques longitudinales, même conséquence s'il existe un lac sous-glaciaire (par exemple dans la zone de la base russe de Vostok), ou bien encore les convergences et divergences de l'écoulement de la calotte. Ces quelques



exemples montrent que la description d'ordre zéro ne peut pas être satisfaisante. La "description à l'ordre un" doit permettre une meilleure caractérisation des types d'écoulement que l'on peut rencontrer dans un inlandsis. Les conditions régnant à la base d'un inlandsis s'avèrent être primordiales pour sa dynamique. Je propose donc que l'"ordre un" discrimine les différentes parties d'un inlandsis par la nature du glissement basal. Ainsi, il y a généralement un frottement fort (voire aucun glissement) pour la calotte, l'ice shelf n'est soumis à aucun frottement à la base, et l'ice stream possède des conditions basales équivalentes à un frottement de faible valeur. La figure I.2 ci-dessous résume cette description :

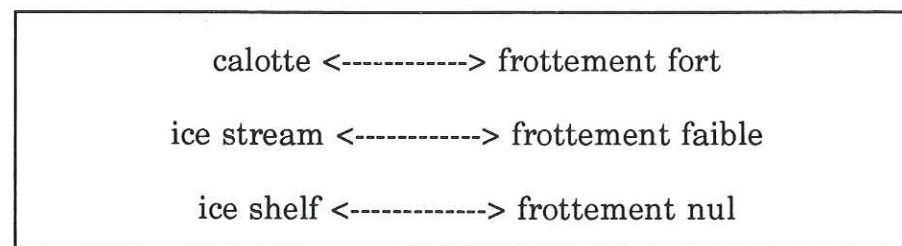


Fig I.2 : caractérisation des différentes parties d'une masse glaciaire par la qualité du frottement basal.

Comme conséquence on voit apparaître un certain nombre de transitions entre ces sous-systèmes qui ne diffèrent en première approximation que par la qualité du frottement basal. Ces transitions peuvent être progressives si elles s'étalent sur des longueurs nettement supérieures à l'épaisseur, ou abruptes dans le cas contraire.

La thèse est articulée autour de l'étude des seules transitions abruptes.

On trouvera dans la suite les chapitres suivants :

ch II : ce chapitre a pour vocation de décrire toutes les équations nécessaires aux différentes études effectuées dans cette thèse. La forme développée des équations dépendant généralement du repère choisi et de la dimension du problème (2D ou 3D), on en a exposé uniquement les formes compactes.

ch III : on présente la seule étude antérieure sur le sujet.

ch IV : présentation de tous les aspects numériques utilisés pour résoudre les problèmes envisagés.

ch V : on pose et résout le problème théorique de la zone de transition

"adhérence - écoulement libre" à deux dimensions. Ce problème peut être considéré comme l'archétype des problèmes traitant des zones de transitions abruptes.

ch VI : étude d'une zone de transition "calotte - ice shelf" abrupte en 2D.

ch VII : on aborde l'étude 3D de la transition "adhérence - écoulement libre". Seuls des résultats préliminaires sont donnés.

ch VIII : conclusions et perspectives.

A ces chapitres on a ajouté un certain nombre d'annexes dont le but est soit d'approfondir un point (A2, A3, A5), soit de présenter des calculs analytiques pouvant être sautés en première lecture (A1, A4, A8), soit encore des formulaires (A6, A7) :

A1 : une solution analytique approchée pour l'écoulement de Poiseuille de la glace pour la loi visqueuse de Smith et Morland.



- A2 : présentation d'une méthode de résolution d'un système linéaire basée sur un principe de "point fixe" et permettant de ne pas "inverser" la matrice.
- A3 : des compléments qualitatifs sur la méthode d'élément finis utilisée pour résoudre les problèmes.
- A4 : la condition de surface libre pour un fluide incompressible est explicitée de façon à détailler les relations existant entre les contraintes.
- A5 : on présente comment sont liés un principe variationnel, une formulation variationnelle, et l'équation aux dérivées partielles associée.
- A6 : un formulaire pour les transformations d'intégrales dans des changements de coordonnées et dans des intégrations par parties.
- A7 : un formulaire pour l'intégration numérique de Gauss.
- A8 : calculs analytiques pour les solutions du chapitre V.
- A9 : sensibilité des solutions numériques à la densité du maillage.

# II

## DESCRIPTION DES EQUATIONS DES ECOULEMENTS



## DESCRIPTION DES EQUATIONS DES ECOULEMENTS

### a) Présentation

Le but du présent chapitre est de formuler explicitement le problème et tous ceux qui y sont associés, c'est à dire le modéliser.

Les objectifs de cette thèse sont de déterminer les propriétés fondamentales de la dynamique de la zone de transition abrupte entre une calotte et un ice shelf (ch VI), et plus généralement celles d'une transition entre une zone à frottement fort et une zone à frottement faible (ch V). Les caractéristiques physiques des problèmes ont donc été simplifiées au maximum car pour déterminer les caractéristiques fondamentales du problème il est nécessaire de ne pas introduire trop de complexité. En effet, le contexte géophysique de l'étude voudrait que l'on tienne compte, par exemple, des éléments suivants : dépendance en température des grandeurs, géométrie réelle du socle, fabrique de la glace, zones crevassées, l'océan est sujet à des marées, processus d'accumulation - ablation, ou encore déformabilité du socle. Or la connaissance que l'on a de ces éléments est faible, voire nulle.

J'ai donc épuré la modélisation jusqu'à ce qu'elle ne contienne que le "minimum incompressible". Ainsi, suivant des hypothèses classiques de la Glaciologie, la glace est considérée comme un matériau de densité homogène, isotrope, continu et incompressible. On suppose de plus que la rhéologie de la glace est uniquement

de nature viscoplastique et donnée par une loi liant la viscosité aux composantes du tenseur des taux de déformation par le biais d'un invariant du second ordre. Le socle est supposé être lisse et indéformable.

#### b) Equations à résoudre

Plusieurs types de problèmes étant traités (2D, 3D, repères différents), on laissera sous forme compacte certaines expressions.

##### *α) équations de la dynamique*

La glace étant un fluide, sa dynamique est gouvernée par les équations de Navier-Stokes incompressible. Néanmoins elle est très visqueuse, ce qui permet de supprimer le terme de convection des équations de Navier-Stokes. Dans toute nos simulations nous ne nous sommes intéressé qu'à la recherche de solutions stationnaires : les dérivées partielles temporelles seront nulles.

On obtient donc le système de Stokes incompressible sous forme compacte :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{div}(\mathbf{U}) = 0$$

Ces équations seront développées lors des applications (ch V, VI, VII)

où  $\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur des efforts intérieurs auxquels est soumis le fluide (les contraintes),  $\mathbf{f}$  le vecteur de la densité volumiques des forces imposées par l'extérieur sur le fluide, et  $\mathbf{U}$  le champ de vitesse du fluide.



A ce système d'équations aux dérivées partielles, il faut rajouter des conditions aux limites. Ces conditions sont de trois types :

- i) les composantes ( $U_x, U_y, U_z$ ) de la vitesse sont imposées.
- ii) les composantes ( $F_x, F_y, F_z$ ) de la densité surfacique de force extérieure sont imposées.
- iii) on impose un mélange des deux types de condition mais en respectant la règle suivante : il ne doit y avoir ni trou ni chevauchement dans le type de composante (par exemple : [ $U_x, U_y$  et  $F_z$  : oui] ; [ $U_x, U_y$  et  $F_x$  : non] ; [ $U_x, U_y$  et ? : non]).

#### β) évolution des surfaces libres

Les écoulements des glaces d'un inlandsis sont des écoulements à surfaces libres. Cela veut dire que leur géométrie est une des inconnues du problème. Une surface  $S$  est définie implicitement par une équation du type "équation d'advection à coefficients non constant. Dans un repère orthonormé ( $Oxyz$ ) dans lequel  $z$  représente la coordonnée verticale toute équation de surface est du type :

$$S(\vec{r}, t) = 0$$

où  $\vec{r}$  est le vecteur position pris sur la surface et  $t$  le temps.

L'évolution de cette surface est alors  $dS/dt = 0$  où la dérivée totale est prise par rapport à la vitesse propre de la surface. On doit alors considérer deux cas, selon qu'il existe ou qu'il n'existe pas de transfert de masse à travers cette surface. Dans le premier cas  $S$  est une surface matérielle et une ligne de courant, et sa vitesse est celle des particules qui la constitue.

On obtient alors l'équation :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{U}_s \cdot \vec{\nabla} S = 0 \quad (\text{II.1})$$

où  $\partial/\partial t$  est la dérivation partielle par rapport au temps et  $\vec{U}_s$  est le champ de vitesse du fluide calculé sur la surface  $S(\vec{r}, t) = 0$ . Si on prend en compte des phénomènes d'accumulation - ablation au niveau de la surface  $S$ , celle-ci doit être considérée comme une surface de discontinuité [5,6] et l'équation précédente se voit adjoindre un terme supplémentaire représentant le bilan normal net, c'est à dire la somme des gains et des pertes perpendiculairement à la surface.

Dans tous les cas de figure on doit avoir la condition :

$$\oint_{\text{périmètre}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dl = 0 \quad (\text{II.2})$$

#### c) conventions d'écriture et de repères

Pour chaque étude on définira un repère absolu orthonormé dans lequel seront définies les composantes des grandeurs vectorielles et tensorielles intervenant dans les diverses équations.

Pour des raisons pratiques évidentes :

$x$  : représentera toujours la coordonnée décrivant la direction principale de l'écoulement.

$y$  : représentera toujours la coordonnée décrivant la direction perpendiculaire à celle de l'écoulement.



z : représentera toujours la coordonnée verticale et l'axe Oz sera orienté vers le haut.

Ainsi :

U<sub>x</sub> : (notée aussi U) est la vitesse horizontale dans la direction de l'écoulement.

U<sub>y</sub> : (notée aussi V) est la vitesse horizontale transversale à l'écoulement.

U<sub>z</sub> : (notée aussi W) est la vitesse verticale.

$\sigma_{ij}$  sont les composantes du tenseur des contraintes (i et j allant de 1 à 2 ou 3).

$d_{ij}$  sont les composantes du tenseur des taux de déformation (i et j allant de 1 à 2 ou 3).

P est la pression du fluide.

#### d) loi de comportement

La viscosité de la glace est décrite par une relation liant les composantes du déviateur du tenseur des contraintes et celles du tenseur des taux de déformation.

Ainsi on a :

$$\sigma'_{ij} = 2 \mu(\dot{\gamma}) d_{ij} \quad \text{où} \quad d_{ij} = (\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i) / 2$$

où  $\mu$  est la viscosité du milieu et  $\dot{\gamma}$  un deuxième invariant du tenseur des taux de déformation dont la définition utilisée ici est :

$$\dot{\gamma} = 2 d_{ij} d_{ij}$$

Ceci fait de la glace un matériau non-linéaire. La loi  $\mu(\dot{\gamma})$  la plus couramment utilisée en glaciologie est une loi de type "loi puissance" et dénommée "**loi de Glen**" du nom de celui qui le premier a effectué des tests expérimentaux systématiques de déformation de la glace [7]. L'expression analytique obtenue par

ajustement des données expérimentales pour des contraintes de valeurs comprises entre 1 et 10 bars est :

$$\mu(\dot{\gamma}) = A (\dot{\gamma})^{(1-n)/n}$$

où A est une constante pouvant dépendre de la température et de la teneur en eau liquide, et n un entier dont la valeur communément admise et utilisée est 3. Cette loi est déduite d'expériences effectuées le plus souvent en compression uniaxiale, dont les valeurs de contrainte ( $\geq 1$  bar) sont très au-delà de celles existant dans les écoulements de masse glaciaires (0,1 à 0,01 bar dans les calottes polaires et encore plus faible dans les ice shelves). Pour l'utiliser aux très faibles taux de déformations rencontrés il faut l'extrapoler. La forme de cette extrapolation ne fait toujours pas l'objet d'un consensus au sein de la communauté glaciologique. Il n'est pas dans mon intention de trancher la question, je vais me contenter de présenter divers avis provenant de personnes dont l'autorité est reconnue en Glaciologie. Les valeurs de l'exposant de la loi de viscosité couvrent le spectre de  $n=1$  à  $n=3$ . Les données utilisées pour établir un choix dans cet ensemble sont de natures diverses : soit il s'agit d'échantillons artificiels, soit de mesures in situ, soit encore de tests effectués en laboratoire sur des échantillons naturels. Les auteurs utilisent tout ou une partie des données disponibles au moment de leur étude.

Pour placer le sujet, commençons par une controverse entre W.S.B Paterson [8], et C.S.M. Doake et E.W. Wolff [9]. En ré-examinant des données de taux de déformation concernant la langue glaciaire de l'Erebus, Camp Century, Byrd Station, Devon Island et Law Dome, Doake et Wolff en arrivent à la conclusion que ces données peuvent s'expliquer par une loi visqueuse linéaire ( $n=1$ ). En



réponse Paterson reprend toute leur argumentation en donnant d'autres interprétations des mêmes données et conclue à  $n=3$ . Dans une réponse à la réponse, Doake et Wolff [10] persistent et signent. Simultanément à ce débat, on a un point de vue de J. Weertman [11]. Le fluage conduisant à une valeur de  $n=1$  est appelé fluage de Harper-Dorn (HP). Ce fluage mis en évidence par les métallurgistes apparaît lorsque les essais mécaniques sont réalisés près du point de fusion du métal. Ces dernières années il semble que la réalité de ce fluage soit remise en question. Pour Weertman et Blacic [12] son observation résulterait d'un artefact lié à des cycles de faible amplitude de la température lors des expérimentations. Ceci amène Weertman [11] à avancer les deux hypothèses suivantes : les données de taux de déformation pour les calottes polaires sont polluées par l'existence d'un fluage non-stationnaire, ou les tests effectués en laboratoire sont sujet à l'artefact des cycles de la température.

Pour Weertman le problème reste encore à résoudre.

D'autres auteurs se sont attachés à ce problème. Voici une liste de leurs conclusions. Cette liste n'est pas exhaustive en soit, mais les auteurs dans leur ensemble ont, je pense, utilisé toutes les données existantes.

Sur des données collectées sur l'ice shelf de Ross Jezek, Alley et Thomas [13] (1985) obtiennent  $n=3$ . Pour Alley (1992) [14], il ne fait également aucun doute que  $n=3$ . Suite à des expériences en laboratoire sur des échantillons de glace artificielle Mellor et Testa (1969) [15] déduisent  $n=1,8$  assorti du jugement suivant : "sur la base de ces expériences, on peut penser que des résultats antérieurs suggérant un

comportement visqueux linéaire sous faible contrainte n'ont pas de poids". En 1973, Thomas [16], en utilisant toutes les données publiées de taux de déformation d'ice shelf, conclue que  $n=3$  est applicable. Même conclusion pour Paterson (1983) [17] à partir de données d'inclinométrie à Camp Century et Byrd Station. R LeB. Hooke (1981) [18] se détermine également pour  $n=3$ . En 1985, Lliboutry et Duval [19] concluent à l'existence d'un seuil de contrainte en dessous duquel la glace devient newtonienne. Le fluage est alors de Harper-Dorn, ce qui nous ramène aux remarques de Weertman et Blacic [12]. P. Piementa (1987) [20] obtient la valeur  $n=1,5$  sur des échantillons naturels de Pôle Sud. Dans une revue concernant la déformation par fluage de la glace Weertman (1983) [21] recommande  $n=3$ . Pour finir cette liste citons la revue de Budd et Jacka (1989) [22] qui donnent  $n=3$ .

Il est clair que les avis sont très partagés. L'indétermination sur la valeur de  $n$  reste un des problèmes majeurs à résoudre dans le futur. Mon analyse de cette situation est qu'il n'existe pas à l'heure actuelle de procédure conduisant à une répétitivité des résultats, créant ainsi un vide épistémologique. En conséquence, toute analyse de résultat est flottante.

Une solution est d'utiliser la loi de Glen avec  $n = 3$  dans tout le domaine de déformation. Cette loi présente alors une singularité infinie lorsque les taux de déformation deviennent simultanément nuls, bien que les fonctions  $\sigma'_{ij}(\dot{\gamma})$  ne présentent pas de singularité infinie lorsque  $\dot{\gamma}$  devient nul ; on peut montrer qu'elles peuvent être définies continûment par un prolongement par continuité (voir annexe A4 pour les détails). La présence de cette singularité de la viscosité



produit des perturbations sur les solutions numériques des tests effectués pour évaluer la fiabilité de la méthode et des programmes. C'est pourquoi je me suis porté sur une loi visqueuse donnée par Smith et Morland [23] (voir également Morland et Shoemaker [24]). Cette loi, obtenue par un nouvel ajustement des données expérimentales de Glen pour une température de 0°, a la forme suivante :

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu(\dot{\gamma}) = 10^5 [1.15 \operatorname{Arctg}(0.929 \dot{\gamma}) + 2.479 \operatorname{Arctg}(0.01185 \dot{\gamma})] / \dot{\gamma} \quad (\text{II.3})$$

On peut voir que  $\mu(\dot{\gamma} = 0)$  n'est pas infinie. Elle présente l'avantage d'être bornée et de ne pas chercher à déterminer la valeur de  $n$ . Son comportement pour les faibles taux de déformation est quasi linéaire.

Mon choix vis-à-vis de cette loi a essentiellement été guidé par son caractère borné.

Il existe un autre moyen pour rendre simultanément la viscosité bornée et linéaire aux faibles taux de déformation : il suffit d'écrire  $\dot{\gamma} = \Phi \tau + B \tau^3$  où  $\tau$  est un second invariant du déviateur des contraintes,  $B$  et  $\Phi$  deux constantes (C. Ritz et P. Duval communication personnelle).

# III

## LES TRAVAUX DE K. HERTERICH



## LES TRAVAUX DE K. HERTERICH

Au cours de ce chapitre, nous allons présenter la seule étude réalisée à ce jour sur le sujet de la transition "calotte - ice shelf" (Klaus Herterich [3]). Mes débuts de thèse n'ont eu pour seul but que de reproduire ses résultats afin de valider le programme construit. Néanmoins, l'étude devait être revue car trop de résultats étaient sujet à caution. Dans la suite de ce chapitre le travail de Herterich sera présenté et analysé.

### a) Les bases théoriques

K. Herterich se propose d'étudier les caractéristiques de l'écoulement de la glace dans une transition abrupte entre une calotte et un ice shelf. Seul le problème en 2D vertical a été envisagé (figure III.1 ci-dessous).

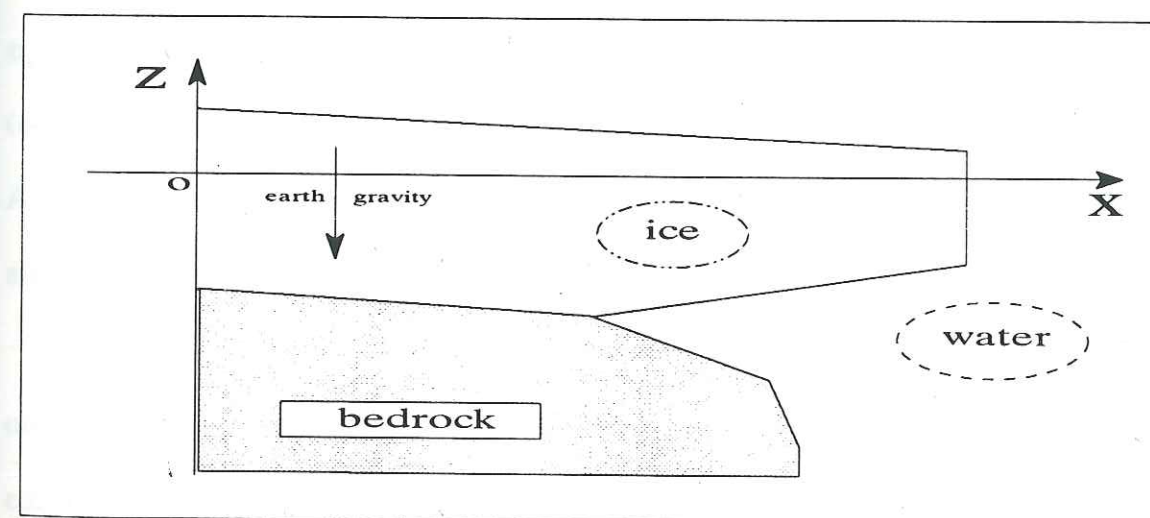


Fig. III.1 : géométrie de la zone de transition et système de coordonnées de référence.



Dans le repère utilisé les équations à résoudre sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où  $\rho$  est la densité de la glace,  $g$  l'accélération de la gravité,  $U$  la vitesse horizontale et  $W$  la vitesse verticale.

La principale caractéristique de cette étude est de ne pas résoudre l'ensemble complet des équations de Stokes. Ces équations sont réduites via une approximation couramment utilisée dans les modèles de calottes polaires :

$$|\partial \sigma_{xz} / \partial x| \ll |\partial \sigma_{zz} / \partial z|$$

Cette condition signifie que l'on néglige les variations le long de l'écoulement de la contrainte de cisaillement par rapport aux variations dans l'épaisseur de la contrainte longitudinale  $\sigma_{zz}$ . Néanmoins, négliger le terme  $\partial \sigma_{xz} / \partial x$  pour une étude de la zone de transition n'est pas forcément judicieux dans la mesure où justement  $\sigma_{xz}$  doit passer du régime calotte (où existe un gradient vertical) à un régime shelf (où le gradient vertical est quasi nul).

Ainsi, par intégration directe de la deuxième équation et en supposant que  $\sigma_{zz} = 0$  sur la surface  $z = h_s(x)$ , on obtient :

$$\sigma_{zz}(x, z) = \rho g (z - h_s(x))$$

où  $h_s(x)$  est l'altitude de la surface supérieure dans le repère de référence. La condition  $\sigma_{zz}(x, z=h_s(x)) = 0$  est critiquable du point de vue analytique car ce n'est pas celle qui est impliquée par la condition de surface libre (voir Annexe A4).



Ensuite après quelques manipulations algébriques et l'emploi de la loi de Glen, la forme finale des équations décrivant la zone de transition est :

$$\begin{cases} -\rho_i \frac{\partial h_s}{\partial x} A^{1/n} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} f \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( f \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

où  $A$  est une constante provenant de la loi de Glen et  $f$  un terme de non-linéarité dont l'expression analytique est :

$$f = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1-n}{2n}} \quad (\text{III.3})$$

où  $n$  est l'exposant de la loi de Glen, et sa valeur vaut 3.

L'étude est complétée par la description des conditions aux limites imposées à la frontière du domaine fluide. La figure III.2 ci-dessous montre l'ensemble des conditions aux limites imposées :

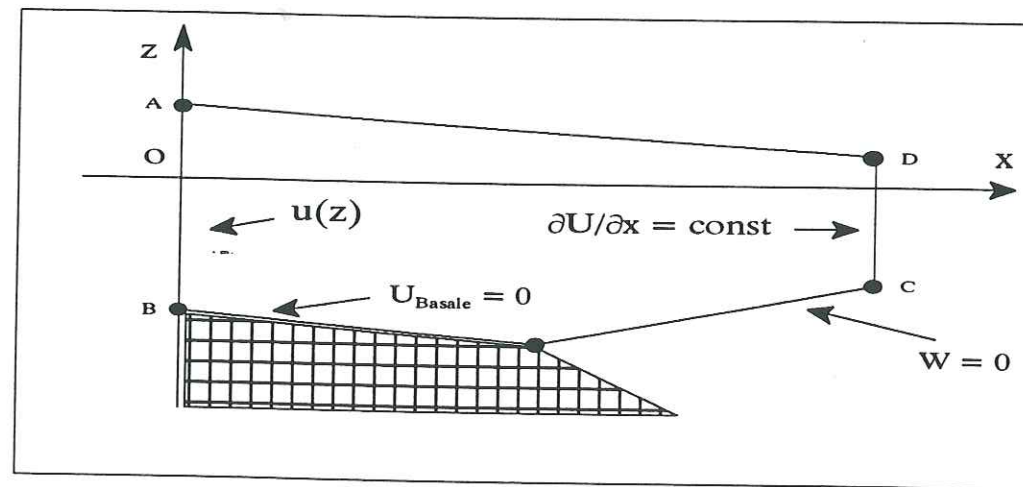


Fig. III.2 : conditions aux limites du problème de la zone de transition de K. Herterich.

Les équations du système (III.2 et III.3) sont résolues numériquement par différences finies. Le système étant non-linéaire sa résolution est itérative, ce qui nécessite l'imposition d'une solution initiale. Pour des besoins propres à la méthode utilisée, il faut connaître la vitesse verticale  $W$  le long d'une ligne dans le plan  $Oxz$  de référence. Le choix de l'auteur s'est porté sur la vitesse verticale de la surface qui est en contact avec l'eau et qui subit la poussée d'Archimède. Cette vitesse est prise égale à 0. K. Herterich a également fait un test de sensibilité à la présence ou non-présence du terme  $\partial W/\partial x$  dans l'équation principale du système. Pour terminer cette présentation rapide avant analyse des résultats, notons également que d'une part la géométrie est fixée une fois pour toutes et que d'autre part la condition aux limites sur la section  $CD$  (voir figure III.2) ne respecte pas la condition sine qua non :

$$\oint_{\text{périmètre}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dl = 0 \quad (\text{III.4})$$

c'est-à-dire : le bilan global de masse à travers la frontière est nul.

## b) Résultats et analyse

### a) vitesse horizontale

Les figures III.3 et III.4 montrent les iso-valeurs de la vitesse horizontale : la figure III.3 lorsque le terme  $\partial W/\partial x$  est inclus et la figure III.4 avec la simplification  $\partial W/\partial x = 0$ .



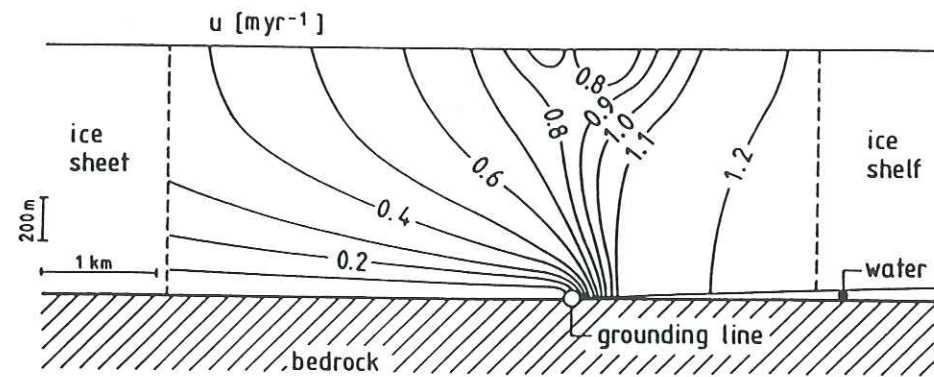


Fig. III.3 : isolignes de la vitesse horizontale lorsque le terme  $\partial W/\partial x$  est inclus dans les équations. (d'après Herterich [6])

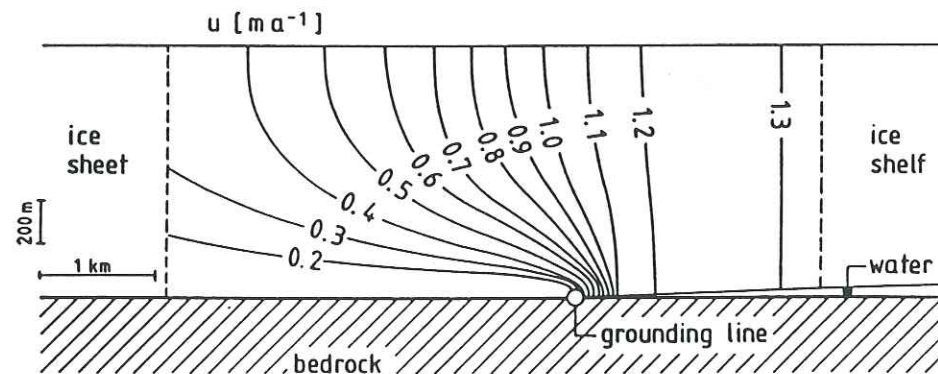


Fig. III.4 : isolignes de la vitesse horizontale lorsque le terme  $\partial W/\partial x$  n'est pas inclus dans les équations. (d'après Herterich [6])

Les deux petits "trous" (fig. III.3) que l'on peut observer pour la vitesse de surface au-dessus de la ligne d'ancrage ne semblent pas réalistes. On peut également se rendre compte que le flux de glace sortant est bien supérieur au flux entrant. En effet, compte tenu de la très faible variation d'épaisseur entre l'entrée et la sortie, et de l'indépendance de la vitesse au sein de l'ice shelf vis-à-vis de la coordonnée verticale, la vitesse sortante doit être très voisine de la valeur moyenne de la vitesse d'entrée.

### β) le cisaillement et la contrainte déviatorique longitudinale

Les figures III.5 et III.6 montrent les résultats sur le cisaillement  $\sigma_{xz}$  et la contrainte déviatorique  $\sigma'_{xx}$  lorsque le terme  $\partial W/\partial x$  est pris en compte :

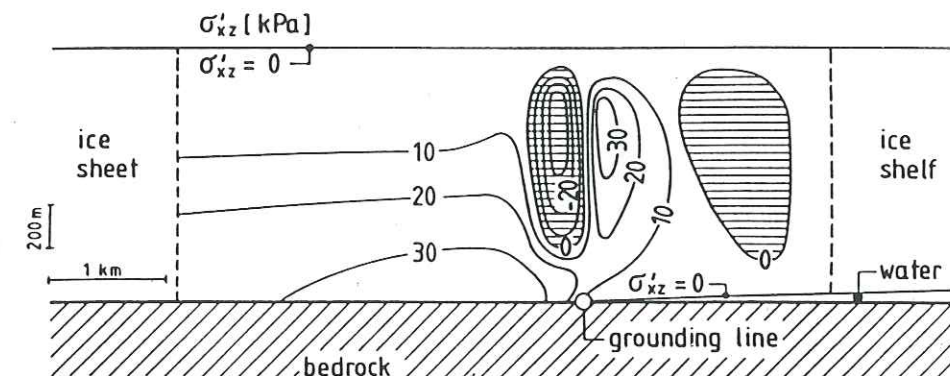


Fig. III.5 : isolignes de la contrainte de cisaillement lorsque le terme  $\partial W/\partial x$  est pris en compte. (d'après Herterich [6])

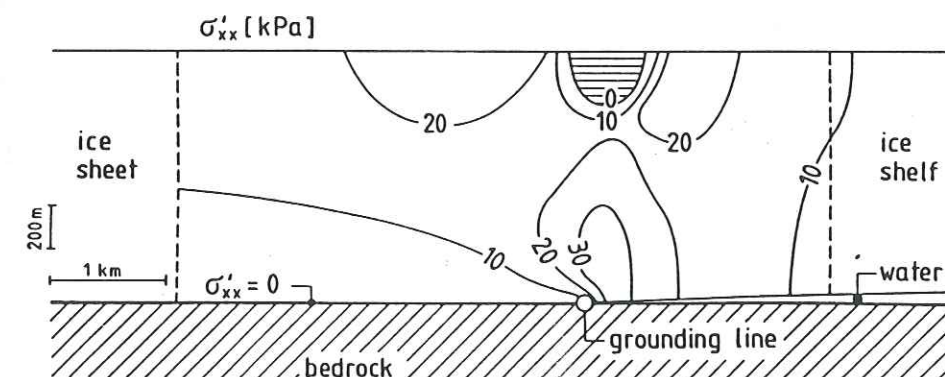


Fig. III.6 : isolignes de la contrainte déviatorique longitudinale lorsque le terme  $\partial W/\partial x$  est pris en compte. (d'après Herterich [6])

valeurs négatives de valeur absolue parfois très élevée dont la signification n'est pas claire. De plus les valeurs de la densité, de la gravité, de l'épaisseur de glace, et de la pente de surface utilisées par K. Herterich donnent avec l'expression



classique du cisaillement basal ( $\rho g h_s \partial h_s / \partial x$ ) une valeur d'environ 12 kPa, qui ne correspond pas du tout à la valeur d'environ 30 kPa fournie par la figure III.5.

### $\gamma$ ) vitesse verticale

La figure III.7 montre les iso-valeurs de la vitesse verticale  $W$  :

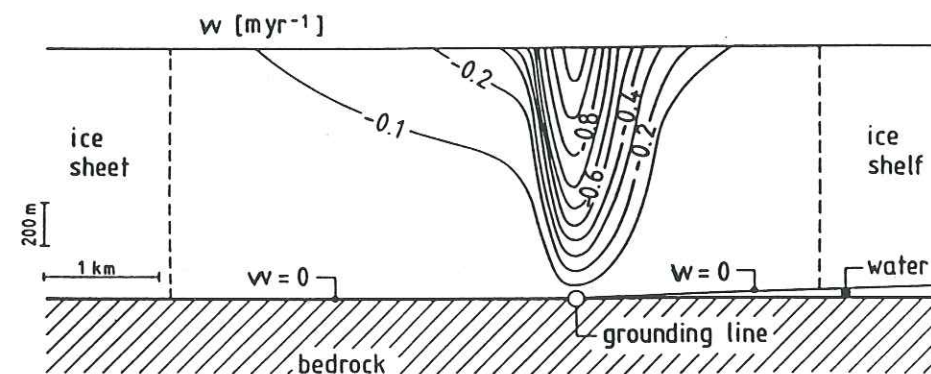


Fig. III.7 : isolignes de la vitesse verticale lorsque le terme  $\partial W / \partial x$  est pris en compte. (d'après Herterich [6])

La partie la plus caractéristique concerne les valeurs rencontrées au-dessus de la ligne d'ancrage. On peut y observer des valeurs négatives dont la valeur absolue est semblable à celle de la vitesse horizontale, ce qui est physiquement inacceptable car, en l'absence d'un flux de masse entrant ou sortant par la surface supérieure, le vecteur vitesse doit être tangent à la surface, ce qui donne des vitesses verticale de l'ordre de  $-10^{-4}$ . De plus, la forme des isolignes est due à la condition aux limites  $W = 0$  sur la surface en contact avec l'eau. Mes premières expériences numériques sur la zone de transition montrèrent (figure III.8) que le réseau d'isolignes est fortement dégénéré en l'absence de cette condition.

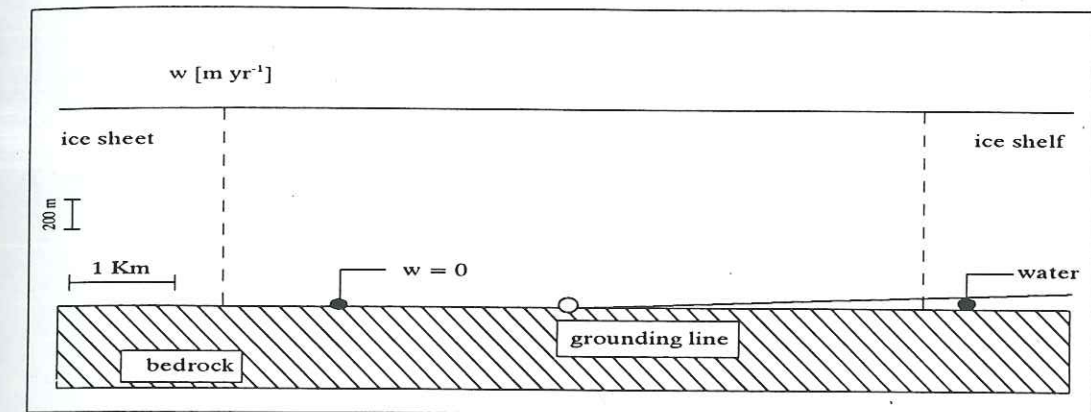


Fig. III.8 : iso-lignes de la vitesse verticale lorsque la condition  $w = 0$  n'est pas utilisée sur la surface flottante

### c) Conclusion

Certaines conditions aux limites (valeur du gradient horizontal de la vitesse horizontale et valeur de la vitesse verticale sur la surface en contact avec l'eau) et l'hypothèse d'une géométrie fixe ne permettent pas d'obtenir de solution satisfaisante. C'est donc sur ces points que l'attention devra se porter.



# IV

## DESCRIPTION DES METHODES NUMERIQUES EMPLOYEES



## DESCRIPTION DES METHODES NUMERIQUES EMPLOYEES

### a) Introduction générale

Dans cette thèse, toute entière consacrée à la résolution numérique des équations de Stokes incompressibles stationnaires ou non pour des écoulements à surfaces libres, les méthodes numériques et leurs implémentations jouent un rôle important. Les équations de la dynamique et les équations cinématiques des surfaces libres requièrent des discrétisations appropriées.

La discrétisation des équations aux dérivées partielles s'effectue dans la plupart des cas grâce à deux grandes classes de méthodes : les différences finies et les éléments finis. Les premières sont simples et facilement programmables, surtout si le maillage est régulier. Mais la discrétisation des dérivées par de simples taux d'accroissement donne une représentation locale des fonctions inconnues assez pauvre. Les éléments finis sont basés sur une formulation plutôt complexe et nécessitent une implémentation plus lourde. Mais en contre partie on a les avantages suivants : le maillage peut être quelconque et la représentation locale des fonctions peut être choisie aussi riche et variée que l'on veut.

Les différentes applications de cette thèse ont utilisé des éléments finis en 2D et 3D.



Dans les paragraphes qui vont suivre seront présentés :

- b) un exposé de la philosophie de base de la méthode "éléments finis" qui s'appuiera sur la présentation succincte de deux méthodes de calcul numérique élémentaire que j'espère être familières au lecteur (l'intégration numérique de Newton-Cotes et l'interpolation de Lagrange). J'ai fait ce choix par souci didactique et pour tenter de bousculer les a priori des glaciologues quant à la complexité de cette méthode.
- c) l'application de la méthode aux équations de Stokes incompressibles et stationnaires pour un problème à deux dimensions.
- d) je montrerai comment on implémente la méthode dans la pratique car entre la présentation du paragraphe c) et la réalisation effective du programme (appelé également code) il y a loin de la coupe aux lèvres.
- e) extension au cas 3D.
- f) extension au cas non-stationnaire.
- g) l'équation cinématique de surface libre et les méthodes de résolution associées.
- h) une présentation de tous les résultats relatifs aux divers tests effectués pour obtenir la meilleure validation possible des programmes. Ces tests concernent des écoulements dont on connaît soit une solution théorique, soit une solution numérique connue.

Quelques aspects de la méthode sont reportés en annexe de façon à ne pas en alourdir la présentation et à faciliter sa lecture.

On donne aussi en annexe une méthode de résolution des systèmes d'équations basée sur une méthode de point fixe. Elle n'a pas été utilisée dans les programmes par suite d'une connaissance tardive de l'article la décrivant et parce que les moyens informatiques du laboratoire ont été suffisants, me permettant d'appliquer ainsi une méthode classique. Néanmoins, je l'ai expérimentée pour en apprécier l'applicabilité générale et également l'applicabilité dans le cas de matrices provenant de la méthode d'éléments finis.

#### b) que sont les éléments finis ?

Tout système d'équations décrivant un système physique est une idéalisation de celui-ci. On en attend une solution unique et bien définie. Mais généralement celle-ci est inaccessible par des techniques analytiques. Pour pallier à ce problème on recherche une solution approchée. Aussi simple que soit l'esprit de cette démarche il faut en expliciter les termes car "solution approchée" est une notion particulièrement vague. L'idéal pour un problème physique est d'obtenir une solution analytique. Cette solution est continue. Le projet de "solution approchée" est d'en déterminer un sous-ensemble fini de valeurs (ou encore discret).

Les éléments finis sont un mode de discrétisation de la solution continue. Pour en expliquer la nature je vais tout d'abord m'attacher à décrire, à titre uniquement d'exemple, deux techniques simples de calcul numérique : l'interpolation polynomiale de Lagrange à une dimension et l'intégration numérique de Newton-Cotes (pour un exposé complet voir [25]).



α) l'interpolation de Lagrange à une dimension

Le problème est :

**" Etant donnés  $N+1$  ( $N \geq 0$ ) bipoints  $(x_k, y_k)$ ,  $k$  de 0 à  $N$ , trouver un polynôme de degré  $N$  unique  $P$  tel que la valeur qu'il prend aux points  $x_k$  distincts soit  $y_k$ . "**

Le polynôme solution -si il existe- a pour expression générale :

$$P(x) = \sum_{i=0}^M a_i x^i$$

On demande donc que  $P(x_k) = y_k$ . La réponse à la question est relativement simple. Tout d'abord, il faut déterminer le degré  $M$  du polynôme  $P$  : si il y a  $(N+1)$  couples  $(x_k, y_k)$  alors  $M = N$  car le nombre de coefficients d'un polynôme quelconque de degré  $N$  est  $N+1$ . Ensuite, l'idée pour trouver  $P$  est la suivante :

**" chercher un polynôme  $P_i$  tel que  $P_i(x_k) = \delta_{ik}$  "** c'est-à-dire  $P_i$  est nul pour tous les  $x_k$  sauf pour  $x_i$  pour lequel il vaut 1. Ainsi on a :

$$P(x) = \sum_{i=0}^N y_i P_i(x)$$

Tout le travail se reporte donc sur la recherche effective des  $P_i(x)$ . Cette étape est la plus aisée. Si le polynôme  $P_i(x)$  s'annule pour les  $x_k$  où  $k \neq i$  alors il s'écrit :

$$P_i(x) = b_i (x-x_0) (x-x_2) \dots (x-x_{i-1}) (x-x_{i+1}) \dots (x-x_N)$$

La constante  $b_i$  étant déterminée en utilisant la condition  $P_i(x_i) = 1$ . On le voit, à une dimension le problème ne pose pas de difficulté majeure. Il y a tout de même un inconvénient important lorsque  $N$  n'est pas petit : le polynôme  $P$  est lourd à utiliser et peut présenter des variations parasites. Si les couples  $(x_k, y_k)$  représentent la valeur  $y_k = f(x_k)$  que prend une fonction  $f$  au point  $x_k$ , il est clair

que l'écart entre le polynôme  $P$  et la fonction  $f$  doit être minimal. Cet aspect du problème sera important dans le second type de méthode numérique exposé ci-dessous.

β) l'intégration numérique selon Newton-Cotes

Le problème est :

**" Soit une fonction  $f$  dont on veut connaître l'intégrale sur un intervalle  $[a, b]$ , trouver un procédé numérique permettant d'en calculer une valeur approchée "**

La question comporte deux aspects : estimer la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  et obtenir une valeur de l'intégrale sur  $[a, b]$  qui soit réaliste. Le premier point a été vu avec la méthode précédente : on prend  $N+1$  points sur  $[a, b]$  -a et b compris- (notons les  $x_k$  pour  $k$  allant de 0 à  $N$ ), on calcule la valeur de  $f$  en ces points (notons les  $f_k$  pour  $k$  allant de 0 à  $N$ ), et on détermine le polynôme de Lagrange en ces bipoints  $(x_k, f_k)$ . L'intégration devient a priori accessible puisque un polynôme est intégrable facilement. Néanmoins ce ne sera pas aussi simple. En effet, la forme analytique sous laquelle a été présentée le polynôme de Lagrange est très esthétique mais très difficile à manier pour du calcul analytique. De plus -même en supposant qu'on développe le polynôme de Lagrange- la valeur même de l'intégrale est à coup sûr sérieusement biaisée car il est connu que de tels polynômes présentent des oscillations parasites lorsque le degré est élevé.

Que faire ? On trouve la réponse dans la connaissance que l'on peut avoir d'une fonction par développement limité (on suppose que la fonction présente les



régularités suffisantes pour l'explication). La figure IV.1 explicite cette affirmation. Tout d'abord (cercle 1) on a la fonction  $f$  dans son ensemble. Ensuite, si l'on regarde de plus près la fonction  $f$  donnée dans cet exemple (cercle 2), elle apparaît être du troisième degré. Si on se rapproche encore plus  $f$  apparaît comme un polynôme du second degré (cercle 3). En poussant jusqu'au bout ce processus,  $f$  apparaîtra comme une droite. Dans l'opération, le diamètre des cercles a été diminuant, ce qui a assuré un aspect de plus en plus simple à  $f$ .

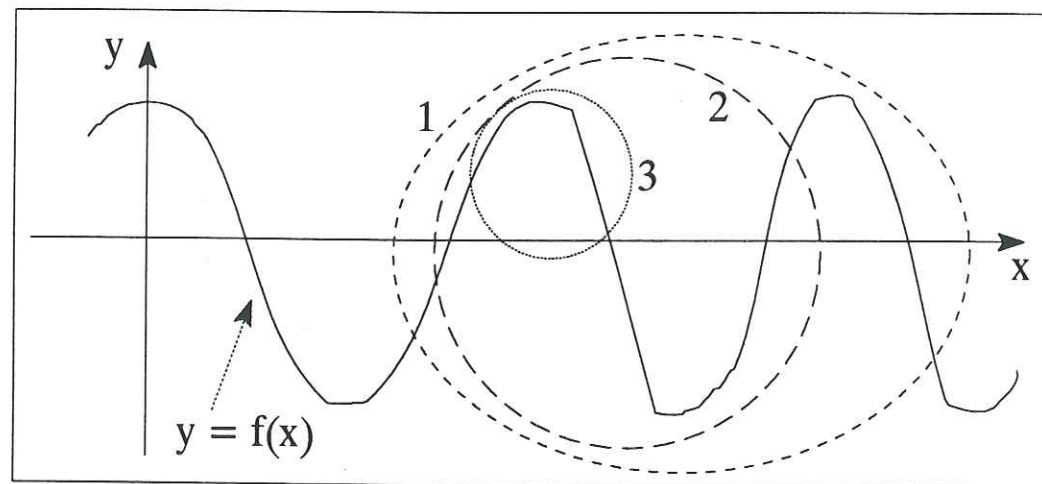


fig. IV.1 : illustration de la notion de représentation approchée d'une fonction  $y=f(x)$ . Plus l'intervalle considéré est petit plus  $f(x)$  paraît simple.

La clef de l'intégration numérique de Newton-Cotes réside dans ce processus de simplification (on parlera de représentation locale de la fonction). On choisit donc un type de représentation locale de la fonction  $f$  : affine, quadratique, cubique etc, c'est-à-dire un polynôme de faible degré. Cette représentation imposera la forme de l'élément : (affine  $\longleftrightarrow$  2 noeuds), (quadratique  $\longleftrightarrow$  3 noeuds), etc. La représentation élémentaire de la fonction se fera par un polynôme de Lagrange qui

aura donc une forme analytique très simple et ainsi une intégration aisée. L'intégrale de  $f$  sur  $[a,b]$  apparaît alors comme la somme de toutes les intégrales élémentaires. Il existe deux règles implicites dans ce processus :

- i) l'intervalle  $[a,b]$  est tout entier décomposé en éléments qui ne se chevauchent ni ne sont disjoints.
- ii) en un point commun à deux éléments, la valeur de la fonction  $f$  est la même  $\Leftrightarrow$  il y a continuité entre les éléments.

Il reste un point important pour le calcul numérique : celui de la précision du résultat. Il y aura en effet conflit entre le nombre d'éléments à utiliser sur  $[a,b]$  et la représentation de la fonction sur l'élément : un grand nombre d'éléments peut permettre une représentation affine alors qu'une représentation quadratique peut se satisfaire de moins d'éléments. La réponse, dans le cas de l'intégration, est donnée par l'analyse numérique qui montre sans conteste qu'on est assurée d'une bonne qualité numérique en utilisant un élément quadratique (c'est ce qu'on appelle l'intégration de Simpson).

Dans le cas général, c'est souvent la plus ou moins grande complexité de l'implémentation de la représentation sur l'élément qui définit la réponse. Néanmoins, il est des cas -comme par exemple pour les éléments finis en mécanique des fluides incompressibles- où des notions plus profondes imposent un certain type de représentation des fonctions (voir annexe A3).

Les deux exposés précédents contiennent la base de ce qui est nécessaire à la compréhension de la méthode "éléments finis". Avant d'en montrer la mise en oeuvre au chapitre suivant il me reste trois points à indiquer.



γ) domaine et sous-domaines

Les équations d'un système physique sont très souvent des équations aux dérivées partielles définies sur le domaine physique envisagé. Prenons par exemple l'équation stationnaire de la chaleur simple à deux dimensions :

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (IV.1)$$

On ré-écrit ceci sous la forme :  $\Delta T = 0$  dans  $\Omega$  où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien et  $\Omega$  le domaine physique du barreau et  $T$  sa température. L'aspect qui nous intéresse réside dans le fait que l'on a également  $\Delta T = 0$  dans  $\Omega'$  inclus dans  $\Omega$  et ce quel que soit  $\Omega'$  : l'équation reste valable pour toute sous-partie de l'espace étudié. C'est cette propriété qui nous mène tout droit à la représentation par éléments finis : dans  $\Omega$  la solution  $T(x,y)$  peut avoir une forme complexe qui devrait être considérablement simplifiée si on la considère dans  $\Omega'$  suffisamment petit.

δ) régularisation par intégration

Considérons dans un premier temps l'intégrale suivante :

$$\int_a^b f \frac{d^2 g}{dx^2} dx \quad (IV.2)$$

La contrainte sur la fonction  $g$  est plus forte que celle imposée à  $f$ . Afin de distribuer des dérivations et ainsi d'équilibrer les contraintes sur ces deux fonctions, on peut procéder à une intégration par partie.

Considérons maintenant une fonction  $f$  présentant une discontinuité en un point  $x_0$ . Si on l'intègre sur un intervalle  $[a,b]$ , la valeur de l'intégrale est parfaitement

définie malgré la discontinuité (voir figure IV.2).

L'intégration permet d'adoucir les contraintes imposées à une fonction ; cette propriété est largement exploitée par la méthode des éléments finis.

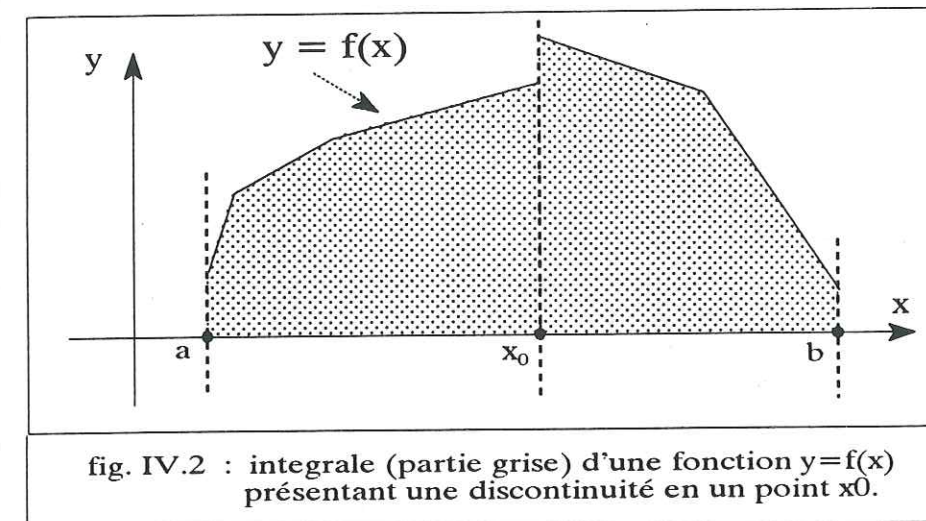


fig. IV.2 : integrale (partie grise) d'une fonction  $y=f(x)$  présentant une discontinuité en un point  $x_0$ .

ε) Principe et formulation variationnels

Ce dernier point concerne la notion de formulation variationnelle associée à un opérateur aux dérivées partielles. Cette procédure assez abstraite est fondamentale dans la construction de la méthode. Désirant tout au long de cette thèse présenter les différents points de la méthode sous un aspect que j'espère plus attrayant qu'un exposé abrupt, je vais faire un petit détour du côté des principes variationnels. Ce type de procédé est par exemple utilisé en mécanique et en optique : il porte respectivement le nom de principe de Maupertuis ou de Fermat. Considérons par exemple le cas de l'optique : le principe de Fermat affirme que le chemin optique suivi par la lumière entre deux points A et B est celui qui minimise la longueur de ce chemin. Ainsi on a une grandeur  $C$  appelée "chemin



optique pour aller de A à B ", et la quantité " longueur du chemin optique " s'exprime de la façon suivante :

$$I_C = \int_{A \rightarrow B} C ds \quad (\text{IV.3})$$

Parmi tous les chemins optiques possibles on recherche celui (ou ceux) tel(s) que  $I_C$  soit la plus petite. Soit  $C'$  ce chemin, on aura :

$$I_{C'} \leq I_C \quad \text{quelque soit } C.$$

Le principe de Fermat met en oeuvre la minimisation de la fonctionnelle  $I_C$ .

Un autre exemple : dans le cas de l'élasticité linéaire la fonctionnelle à minimiser est alors tout simplement l'énergie potentielle élastique du matériau.

On le voit il existe un aspect très "avec les mains" de ces principes variationnels.

Il est toujours possible de passer du principe variationnel à la formulation variationnelle car c'est une étape du processus de minimisation. L'inverse n'est pas vrai. La formulation variationnelle d'un problème n'est pas très naturelle. Néanmoins, c'est souvent le point de départ des méthodes d'éléments finis car elle est plus fondamentale et parce que tous les problèmes de physique ne sont pas décrits par un principe variationnel. Pour ne pas alourdir le présent paragraphe je reporte à l'annexe A5 la description du passage du principe variationnel à la formulation variationnelle.

Il existe différentes formulations des éléments finis. Celle que j'utilise est celle de Galerkin (voir paragraphe IV,c). Ce n'est en fait qu'un choix particulier qui est fait lors de la formulation variationnelle.

En résumé :

**Les éléments finis sont une méthode de résolution discrète des équations décrivant un système physique basée sur les points suivants :**

- i) une décomposition du domaine étudié en sous-domaines (les éléments).
- ii) une description de la solution dans chaque sous-domaine le plus généralement sous la forme d'un polynôme de Lagrange.
- iii) une formulation variationnelle pouvant dans certains cas se ramener à un principe variationnel avec minimisation.

Remarques :

- l'utilisation des polynômes de Lagrange pour représenter les fonctions inconnues n'assure qu'une continuité inter-éléments.
- sur une face commune à deux éléments, seule la dérivée tangentielle est continue. Donc, dans un repère quelconque, les toutes les dérivées partielles peuvent être discontinues. Pour calculer les gradients aux noeuds du maillage, il est donc nécessaire de procéder à des moyennes qui inévitablement assoupliront ces gradients.



c) Résolution par éléments finis des équations de Stokes incompressibles et stationnaires à deux dimensions dans l'approche de Galerkin.

α) discrétisation des équations

Dans le présent paragraphe on va s'attacher à la réalisation pratique de la discrétisation des équations de Stokes incompressibles et stationnaires en 2D. Leur forme compacte a été donnée au chapitre II). Si on les développe on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

# La première étape consiste transformer ces équations en utilisant la relation constitutive d'un fluide :

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \quad \text{avec :} \quad d_{ij} = (\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i) / 2$$

où  $\mu$  est la viscosité du fluide.

Ceci nous amène tout naturellement à la formulation dite "en variables primitives" ou encore "vitesses-pressure".

Le système à résoudre devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (2\mu \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu (\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x})) - \frac{\partial P}{\partial x} + f_x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (2\mu \frac{\partial W}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial x} (\mu (\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x})) - \frac{\partial P}{\partial z} + f_z = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

avec U, W et P pour inconnues.

# La deuxième étape représente le passage à la formulation variationnelle du problème : on multiplie respectivement la première, la deuxième et la troisième équation par  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ , et  $\Phi_3$ . Ces trois fonctions sont ce qu'on appelle des fonctions-test. Leur rôle sera précisé plus loin. On intègre ensuite chacune des équations sur le domaine fluide  $\Omega$ . On obtient donc :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \Phi_1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (2\mu \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu (\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x})) - \frac{\partial P}{\partial x} + f_x \right] d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \Phi_2 \left[ \frac{\partial}{\partial z} (2\mu \frac{\partial W}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial x} (\mu (\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x})) - \frac{\partial P}{\partial z} + f_z \right] d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \Phi_3 \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right] d\Omega = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

Les équations de base étant valables sur tout le domaine  $\Omega$ , elles le sont également sur toute sous-partie de  $\Omega$ . Le système (IV.6) est donc intégré sur chaque sous-domaine élémentaire  $V_e$  et toutes les grandeurs intervenant sont maintenant définies sur l'élément :



$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{V_e} \Phi_1^e \left[ \frac{\partial}{\partial x} (2\mu^e \frac{\partial U^e}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu^e (\frac{\partial U^e}{\partial z} + \frac{\partial W^e}{\partial x})) - \frac{\partial P^e}{\partial x} + f_x^e \right] dV_e = 0 \\ \int_{V_e} \Phi_2^e \left[ \frac{\partial}{\partial z} (2\mu^e \frac{\partial W^e}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial x} (\mu^e (\frac{\partial U^e}{\partial z} + \frac{\partial W^e}{\partial x})) - \frac{\partial P^e}{\partial z} + f_z^e \right] dV_e = 0 \\ \int_{V_e} \Phi_3^e \left[ \frac{\partial U^e}{\partial x} + \frac{\partial W^e}{\partial z} \right] dV_e = 0 \end{array} \right. \quad (IV.7)$$

Pour répartir les <sup>2</sup>régularités des fonctions intervenant dans ces équations on procède à des transferts de dérivation par intégration par parties (voir Annexe A6 pour les formules). Ainsi on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{V_e} 2\mu^e \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial x} \frac{\partial U^e}{\partial x} dV_e + \int_{V_e} \mu^e \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial z} \frac{\partial U^e}{\partial z} dV_e + \int_{V_e} \mu^e \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial z} \frac{\partial W^e}{\partial x} dV_e - \int_{V_e} \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial x} P^e dV_e = F_1^{V_e} + F_1^{S_e} \\ \int_{V_e} 2\mu^e \frac{\partial \Phi_2^e}{\partial z} \frac{\partial W^e}{\partial z} dV_e + \int_{V_e} \mu^e \frac{\partial \Phi_2^e}{\partial x} \frac{\partial U^e}{\partial z} dV_e + \int_{V_e} \mu^e \frac{\partial \Phi_2^e}{\partial x} \frac{\partial W^e}{\partial x} dV_e - \int_{V_e} \frac{\partial \Phi_2^e}{\partial z} P^e dV_e = F_2^{V_e} + F_2^{S_e} \\ \int_{V_e} \Phi_3^e \frac{\partial U^e}{\partial x} dV_e + \int_{V_e} \Phi_3^e \frac{\partial W^e}{\partial z} dV_e = 0 \end{array} \right. \quad (IV.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1^{V_e} = \int_{V_e} \Phi_1^e f_x^e dV_e \quad F_2^{V_e} = \int_{V_e} \Phi_2^e f_z^e dV_e \\ F_1^{S_e} = \oint_{S_e} \Phi_1^e (\sigma_{xx}^e n_x^e + \sigma_{xz}^e n_z^e) dS_e \\ F_2^{S_e} = \oint_{S_e} \Phi_2^e (\sigma_{xz}^e n_x^e + \sigma_{zz}^e n_z^e) dS_e \end{array} \right. \quad (IV.9)$$

<sup>2</sup> On appelle régularité d'une fonction les caractéristiques qui concernent sa continuité et/ou l'existence et la continuité des ses dérivées partielles successives.

Les expressions  $F_1^{V_e}$ ,  $F_2^{V_e}$  sont les formes variationnelles des forces volumiques subies par le fluide dans le sous-domaine élémentaire  $V_e$ . De leur côté  $F_1^{S_e}$ ,  $F_2^{S_e}$  sont les formes variationnelles des forces surfaciques auxquelles est soumis le sous-domaine  $V_e$  de la part des sous-domaines qui l'entourent :  $(\sigma_{xx}^e n_x^e + \sigma_{xz}^e n_z^e)$  et  $(\sigma_{xz}^e n_x^e + \sigma_{zz}^e n_z^e)$  sont respectivement la composante horizontale et la composante verticale de la force surfacique extérieure avec  $n_x^e$  et  $n_z^e$  qui sont les composantes du vecteur "normale extérieure" de la frontière  $S^e$  du sous-domaine  $V_e$ .

# L'étape suivante consiste à incorporer les expressions de  $U^e$ ,  $W^e$  et  $P^e$  dans le système (IV.8), puis à expliciter le rôle des fonctions-test  $\Phi_1^e$ ,  $\Phi_2^e$ ,  $\Phi_3^e$ .

Le domaine  $\Omega$  a été décomposé en sous-domaines élémentaires  $V_e$ . Sur chacun d'eux les variables  $U$ ,  $W$  et  $P$  seront exprimées sous la forme d'une somme de polynômes de Lagrange. Le problème étant à deux dimensions les polynômes dépendent des deux coordonnées  $x$  et  $z$ . On peut donc écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^e(x,z) = \sum_{i=1}^M U_i^e \varphi_i^e(x,z) \\ W^e(x,z) = \sum_{i=1}^M W_i^e \varphi_i^e(x,z) \\ P^e(x,z) = \sum_{k=1}^N P_k^e \psi_k^e(x,z) \end{array} \right. \quad (IV.10)$$

L'exposant "e" réfère à l'élément.  $M$  et  $N$  sont les nombres de noeuds nécessaires pour construire l'élément : il sont a priori différents car les vitesses  $U$  et  $W$  et la



pression  $P$  ne sont pas de même nature. Les  $U_i^e$  et  $W_i^e$  ( $i$  de 1 à  $M$ ) et  $P_k^e$  ( $k$  de 1 à  $N$ ) sont les valeurs prises respectivement par  $U^e$ ,  $W^e$  et  $P^e$  aux noeuds de l'élément. Les  $\varphi_i^e$  et les  $\psi_k^e$  sont respectivement des polynômes de Lagrange pour les vitesses et la pression. Les polynômes dépendent de l'élément considéré car ils sont fonctions des coordonnées géométriques des noeuds de cet élément.

Le cadre théorique de la formulation variationnelle stipule que les fonctions-test sont respectivement des "variations" de  $U^e$ ,  $W^e$  et  $P^e$ . D'un point de vue physique il est possible de comprendre leur rôle en se référant à la méthode des travaux virtuels.

Dans le cadre d'une méthode numérique, le choix de  $\Phi_1^e$ ,  $\Phi_2^e$ ,  $\Phi_3^e$  ne peut pas être fait dans un ensemble infini -cela va de soi. On est donc obligé de le restreindre, ce qui amène à plusieurs versions de la méthode des éléments finis, dont la plus fréquemment utilisée est celle de Galerkin pour laquelle l'ensemble des fonctions-test est confondu avec celui des polynômes de Lagrange servant à décomposer les variables  $U^e$ ,  $W^e$  et  $P^e$ . Ainsi  $\Phi_1^e$  et  $\Phi_2^e$  seront pris parmi les  $\varphi_j^e$ , et  $\Phi_3^e$  parmi les  $\psi_k^e$ . A titre d'exemple, considérons la première équation du système (IV.8) et en particulier son troisième terme :

$$\int_{V_e} \mu^e \frac{\partial \Phi_1^e}{\partial z} \frac{\partial W^e}{\partial x} dV_e \rightarrow \int_{V_e} \mu^e \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^M W_i^e \varphi_i^e \right) dV_e \rightarrow \sum_{i=1}^M W_i^e \left( \int_{V_e} \mu^e \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial x} dV_e \right) \quad (IV.11)$$

qui se ré-écrit :

$$\sum_{i=1}^M W_i^e K_{ij}^{21} \quad \text{avec} : \quad K_{ij}^{21} = \int_{V_e} \mu^e \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial x} dV_e \quad (IV.12)$$

où  $K_{ij}^{21}$  représente un élément de matrice,  $i$  et  $j$  variant de 1 à  $M$  (pour ne pas trop

alourdir la notation la référence (e) à l'élément a été supprimée).

Pour les autres termes on a :

$$\left\{ \begin{aligned} K_{ij}^{11} &= \int_{V_e} \mu^e \left( 2 \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial z} \right) dV_e \\ K_{ij}^{22} &= \int_{V_e} \mu^e \left( \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial x} + 2 \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i^e}{\partial z} \right) dV_e \\ K_{kj}^{31} &= - \int_{V_e} \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial x} \psi_k^e dV_e \\ K_{kj}^{32} &= - \int_{V_e} \frac{\partial \varphi_j^e}{\partial z} \psi_k^e dV_e \\ K^{33} &= 0 \\ \text{de plus : } K_{ij}^{21} &= K_{ji}^{21} \quad K_{jk}^{13} = K_{kj}^{31} \quad K_{jk}^{23} = K_{kj}^{32} \\ \text{on observe également que : } K_{ij}^{11} &= K_{ji}^{11} \quad K_{ij}^{22} = K_{ji}^{22} \end{aligned} \right. \quad (IV.13)$$

On obtient ainsi le système suivant ( $j$  varie de 1 à  $M$  et  $k$  de 1 à  $N$ ) :

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^M U_i^e K_{ij}^{11} + \sum_{i=1}^M W_i^e K_{ij}^{21} + \sum_{k=1}^N P_k^e K_{kj}^{31} &= F_j^{e,x} & j \in [1, M] \\ \sum_{i=1}^M U_i^e K_{ij}^{12} + \sum_{i=1}^M W_i^e K_{ij}^{22} + \sum_{k=1}^N P_k^e K_{kj}^{32} &= F_j^{e,z} & j \in [1, M] \\ \sum_{i=1}^M U_i^e K_{ik}^{13} + \sum_{i=1}^M W_i^e K_{ik}^{23} + 0 &= 0 & k \in [1, N] \end{aligned} \right. \quad (IV.14)$$

$F_j^{e,x}$  est le terme ( $F_1^{ve} + F_1^{se}$ ) dans lequel  $\Phi_1^e$  a été remplacée par  $\varphi_j^e$  et  $F_j^{e,z}$  est le terme ( $F_2^{ve} + F_2^{se}$ ) dans lequel  $\Phi_2^e$  a été remplacée par  $\varphi_j^e$ .



Sous une forme plus compacte :

$$\begin{pmatrix} K^{11} & K^{21} & K^{31} \\ K^{12} & K^{22} & K^{32} \\ K^{13} & K^{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U^e \\ W^e \\ P^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{e,x} \\ F^{e,z} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

Soit :

$$K^e \cdot \mathcal{U}^e = \mathcal{F}^e.$$

La matrice est de dimension  $(2M+N, 2M+N)$ . Le vecteur  $\mathcal{U}^e = (U^e \ W^e \ P^e)$  a pour composantes  $[(U^e)_{i=1 \text{ à } M}, (W^e)_{i=1 \text{ à } M}, (P^e)_{k=1 \text{ à } N}]$  et le vecteur  $\mathcal{F}^e = (F^{e,x} \ F^{e,z} \ 0)$  a pour composantes  $[(F^{e,x})_{j=1 \text{ à } M}, (F^{e,z})_{j=1 \text{ à } M}, (0)_{k=1 \text{ à } N}]$ .

Avant de poursuivre, examinons les propriétés des matrices élémentaires. On aura déjà remarqué (éq IV.13) qu'elles sont symétriques ( $K_{ij}^e = K_{ji}^e$  quelque soient  $i$  et  $j$ ). On observe également que ces matrices sont positives et non pas définies positives :  $K_{ii}^e \geq 0$  pour tout  $i$ . Comme certains termes diagonaux sont nuls, certaines techniques très pratiques de résolution de systèmes linéaires ne sont pas applicables : la méthode directe de Cholesky, ou encore les méthodes itératives de Jacobi, de Gauss-Siedel ou de relaxation pour lesquelles la convergence n'est pas assurée (voir Ciarlet [26]).

# La dernière étape est l'assemblage des systèmes élémentaires. Cette étape est la conséquence de l'hypothèse de continuité des fonctions d'interpolation d'un élément à l'autre.

Au sein d'un élément donné, il y a  $2M+N$  variables numérotées de 1 à  $2M+N$ . Cette numérotation est dite locale. Chacune des  $2M+N$  variables élémentaires est

attachée à un noeud de l'élément et chaque noeud élémentaire est un noeud du maillage du domaine fluide  $\Omega$ . Ainsi chaque variable locale a une place déterminée dans l'ensemble de toutes les variables, faisant ainsi apparaître une numérotation globale. La procédure d'assemblage des matrices élémentaires consiste à les regrouper en une matrice globale en établissant le lien entre les deux numérotations. Explicitons cette étape. Appelons Nvar le nombre total de variables du problème et considérons deux indices globaux quelconques  $N_1$  et  $N_2$  compris entre 1 et Nvar. Deux cas se présentent : soit il existe un élément qui possède deux variables locales dont les numérotations globales correspondent effectivement à  $N_1$  et  $N_2$ , soit il n'y en a pas. De cette propriété découle l'existence d'une largeur de bande dans la matrice globale : la matrice globale ne sera remplie que lorsqu'il y aura "interaction" de deux variables au sein d'un élément. Considérons donc tous les éléments possédant la propriété d'"interaction" pour les deux indices  $N_1$  et  $N_2$ . La règle d'assemblage devient alors très simple :

**" L'élément  $K_{N_1 N_2}$  de la matrice globale est la somme de tous les éléments de matrices locales telles que la numérotation locale corresponde à la numérotation globale pour les éléments "en interaction" "**

On écrit :

$$K_{(globale)} = \sum_{\text{éléments}} K_{(locale)}^e \quad (\text{IV.16})$$

La réalisation pratique de l'assemblage sera montrée au sous-paragraphe (IV,d,β).



On notera  $\mathcal{U}$  le vecteur global des variables et  $\mathcal{F}$  le vecteur-force global résultant de l'assemblage des vecteurs-forces élémentaires. Cet assemblage s'effectue de la même façon que pour celui des matrices, à une différence près. Le vecteur-force se décompose en deux termes : un terme volumique et un terme surfacique. Pour le premier des deux on procède de la même façon qu'avec les éléments des matrices  $K^e$ . Il n'en va pas de même pour les termes surfaciques. Ceux-ci sont en effet des intégrales de contour fermé. Regardons la figure IV.3 ci-dessous :

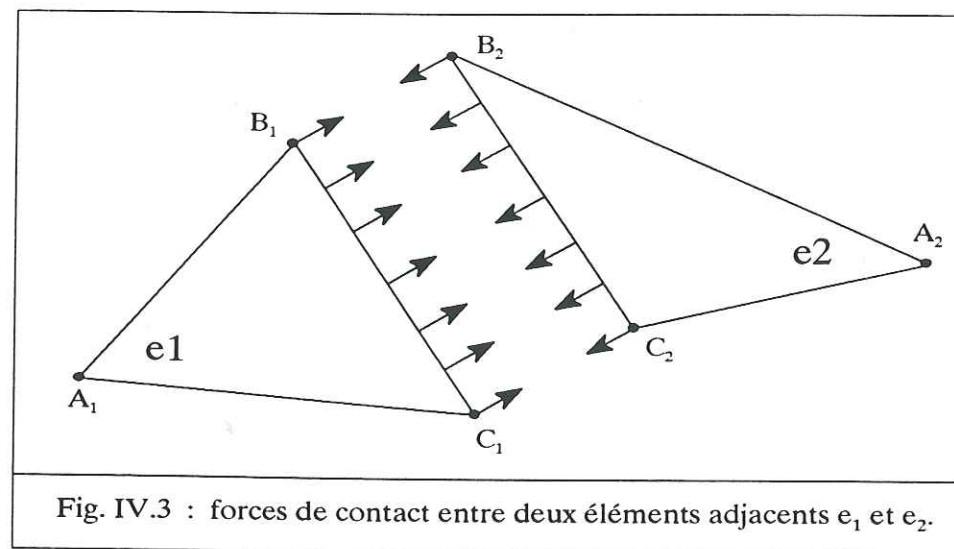


Fig. IV.3 : forces de contact entre deux éléments adjacents  $e_1$  et  $e_2$ .

On a deux éléments  $e_1$  et  $e_2$  adjacents par un côté ( $B_1C_1$ ,  $B_2C_2$ ). Dans  $e_1$  on parcourt le périmètre du triangle dans le sens ( $A_1B_1C_1$ ), et dans  $e_2$  dans le sens ( $A_2B_2C_2$ ). Dans les deux éléments on parcourt le côté adjacent de  $B_1$  ( $B_2$ ) vers  $C_1$  ( $C_2$ ). En vertu du principe de l'action et de la réaction, la force exercée par  $B_1C_1$  sur  $B_2C_2$  est l'opposée de celle exercée par  $B_2C_2$  sur  $B_1C_1$ . Lors de l'assemblage, la contribution du côté ( $B_1C_1$ ,  $B_2C_2$ ) sera donc nulle. Il en ira de même pour tous les

côtés intérieurs au domaine  $\Omega$ . Les seules contributions non-nulles proviendront des côtés appartenant à la frontière du domaine  $\Omega$ . Les assemblages ayant été effectués on obtient le système global suivant :

$$\mathcal{K} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{F}$$

En résumé : à partir d'un système d'équations aux dérivées partielles continues, on aboutit à un système discret pouvant se prêter à une implémentation sur ordinateur. Penchons nous maintenant sur la question du choix des représentations polynomiales des fonctions  $U, W$  et  $P$ .

### β) choix des représentations polynomiales

Dans un premier temps nous allons voir que :

**" pour que les erreurs sur la solution et sur toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $s$  tendent vers zéro quand la taille des éléments tend vers zéro, il faut que la représentation polynomiale de la solution contienne les polynômes <sup>1</sup>complets d'ordre  $s$  ".**

L'analyse présentée s'inspire de celle de l'ouvrage de Dhatt et Touzot [27]. Notons  $S_a$  et  $S_{ex}$  respectivement la solution approchée et la solution exacte sur un élément

<sup>1</sup> On appelle polynôme complet à plusieurs variables d'ordre  $s$  un polynôme contenant a priori tous les monômes de l'ordre 0 à l'ordre  $s$ . Par exemple pour le triangle à deux dimensions :

$$P(x, z) = \sum_{i+j \leq s} a_{ij} x^i z^j$$



donné. Etudier l'erreur entre ces deux solutions consiste à étudier la différence  $E = |S_{ex} - S_a|$ . Pour que la méthode de discrétisation puisse avoir un sens, il est nécessaire (mais pas forcément suffisant) que cette erreur tende vers zéro sur l'élément lorsque la dimension de l'élément -caractérisé par un paramètre noté  $h$ - tend vers zéro.

Plus formellement, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} |S_a - S_{ex}| = 0 \quad (IV.17)$$

Mais pour  $h \rightarrow 0$ , l'élément se réduit à un point. La limite précédente doit donc s'interpréter de la façon suivante : si  $P_{lim}$  est le point auquel est réduit l'élément lorsque  $h$  tend vers zéro, on doit avoir  $S_a(P_{lim}) = S_{ex}(P_{lim})$ . Or la valeur  $S_{ex}(P_{lim})$  est une constante parfaitement définie,  $S_a$  doit donc contenir un terme constant a priori non nul. Si l'on procède de même pour les différentes dérivées partielles la conclusion de l'énoncé précédent s'impose.

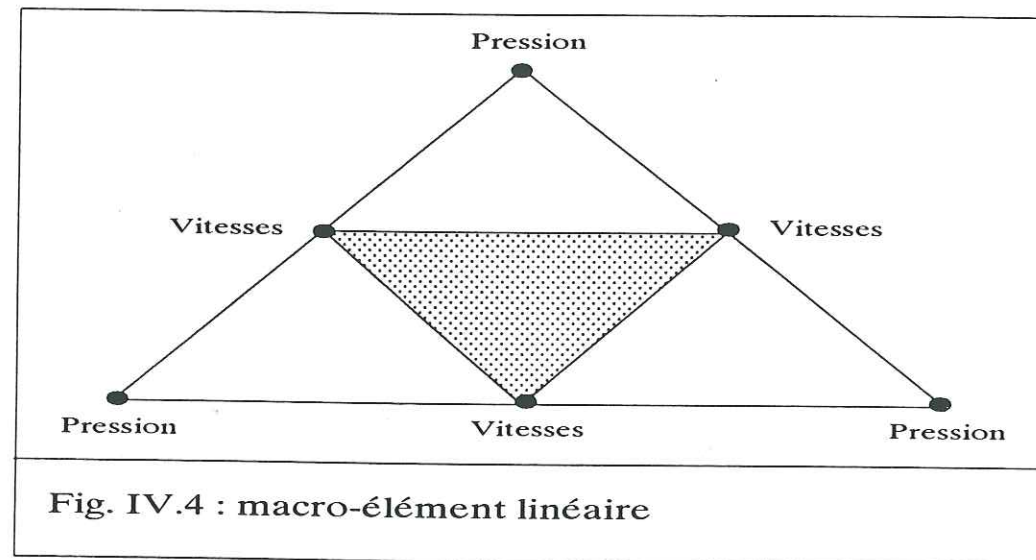
Si la condition précédente s'avère donc nécessaire dans le cas général, il apparaît qu'elle n'est pas suffisante pour la formulation en variables primitives. Dès les premières utilisations de la méthode des éléments finis aux équations décrivant un fluide incompressible, il est apparu que les représentations polynomiales des vitesses et de la pression ne pouvaient pas être choisies indépendamment l'une de l'autre. Si -dans les expériences numériques servants de test- les champs de vitesse calculés ne présentent généralement pas d'erreurs notables, il n'en va pas de même pour le champ de pression qui peut présenter des erreurs très significatives. L'article de Hood et Taylor [28] consacré à la comparaison entre

divers ensembles de représentation polynomiales pour  $U$ ,  $W$  et  $P$  met bien en évidence cet effet. La cause fondamentale de ce manque de précision dans la solution de la pression provient de la relation d'incompressibilité  $\text{div}(\mathbf{U}) = 0$ . Pour les fluides incompressibles à viscosité constante, les résultats fondamentaux concernant les méthodes d'éléments finis ont été établis par plusieurs auteurs [29,30,31]. La question pratique qui se pose est de savoir quelles sont les représentations polynomiales à adopter -respectivement pour les vitesses et la pression- pour obtenir des résultats fiables. On est donc amené à définir des paires de représentation, c'est-à-dire établir la façon dont vont être représentées les vitesses et la pression. D'après les analyses, il apparaît qu'une paire donnée est admissible ou pas selon qu'elle vérifie ou pas un critère théorique établi par Babuska [32,33] (dans l'annexe A3, on présente les conséquences numériques de la violation de ce critère). Toutes ces notions sont synthétisées dans un ouvrage limpide (Guntsberger [34]). Voici quelques exemples de paires admissibles :

- 1) la pression est prise constante sur un triangle et la vitesse est interpolée linéairement sur une subdivision en quatre du triangle de la pression.
- 2) même cas que le précédent mais sur un maillage constitué de quadrilatères.



3) on utilise une approximation linéaire continue pour les vitesses et pour la pression. On choisit un élément de géométrie triangulaire pour toutes les variables mais défini de la façon suivante (voir la figure IV.4 ci-dessous) :



4) les paires de Taylor - Young : si l'ordre des polynômes d'interpolation est  $s$  pour la pression alors il est  $s+1$  pour les vitesses. De plus les éléments géométriques utilisés pour les deux types de variables sont confondus.

Il apparaît que dans la pratique seul un nombre restreint de paires sont utilisées ; ceci semble être dû à l'aspect plus ou moins programmable des paires. A ma connaissance, les paires les plus couramment utilisées sont celles du type Taylor-Young. Je n'est pas dérogé à l'habitude.

### $\gamma$ ) conditions aux limites

Il existe deux catégories de conditions aux limites. Celles permettant d'imposer les variables  $U$  et  $W$  dénommées conditions essentielles, et celles intervenant dans les intégrales de surface dénommées conditions naturelles. La variable pression  $P$  ne peut faire l'objet d'une imposition isolée car la fonction-test associée n'intervient pas dans les équations de Stokes (voir Reddy p 281 [35]). En revenant au mode de dérivation de la formulation variationnelle, il faut noter que les conditions naturelles sont la conséquence des intégrations par parties effectuées sur certains termes. D'où leur dénomination de "naturelles". L'insertion des conditions aux limites essentielles est l'un des thèmes abordés dans le paragraphe suivant.

### d) Implémentation de la méthode des éléments finis

Dans le chapitre précédent il a été vu comment était dérivé le système discret à partir du système continu. Dans ce chapitre nous allons aborder la description des tâches à effectuer pour l'implémentation de la méthode :

- $\alpha$ ) calculer les éléments des matrices locales.
- $\beta$ ) assembler les matrices locales en une matrice globale.
- $\gamma$ ) calculer les intégrales des forces volumiques.
- $\delta$ ) imposer les conditions aux limites de vitesses.
- $\epsilon$ ) calculer les intégrales surfaciques en tous les noeuds où les vitesses n'ont pas été imposées.
- $\zeta$ ) résoudre le système matriciel.

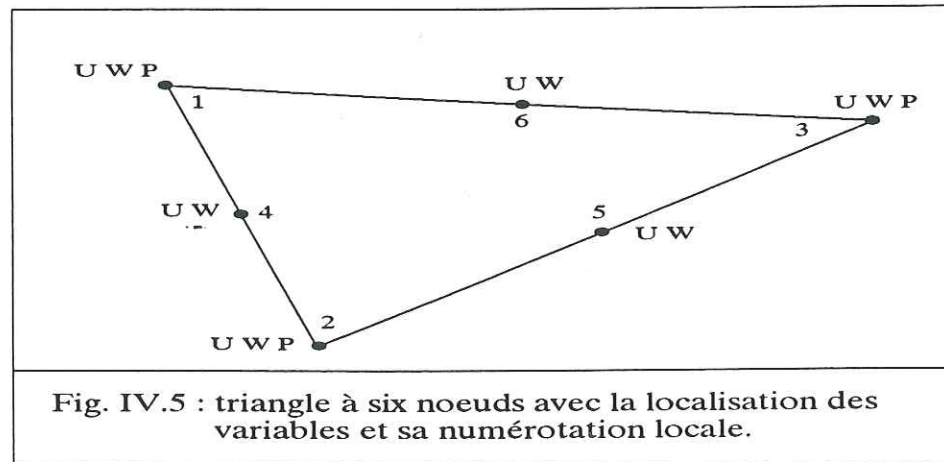


$\alpha)$  calculs des matrices élémentaires :

Les composantes des matrices élémentaires sont des intégrales de certaines quantités. Reprenons les composantes du bloc  $K^{21}$  :

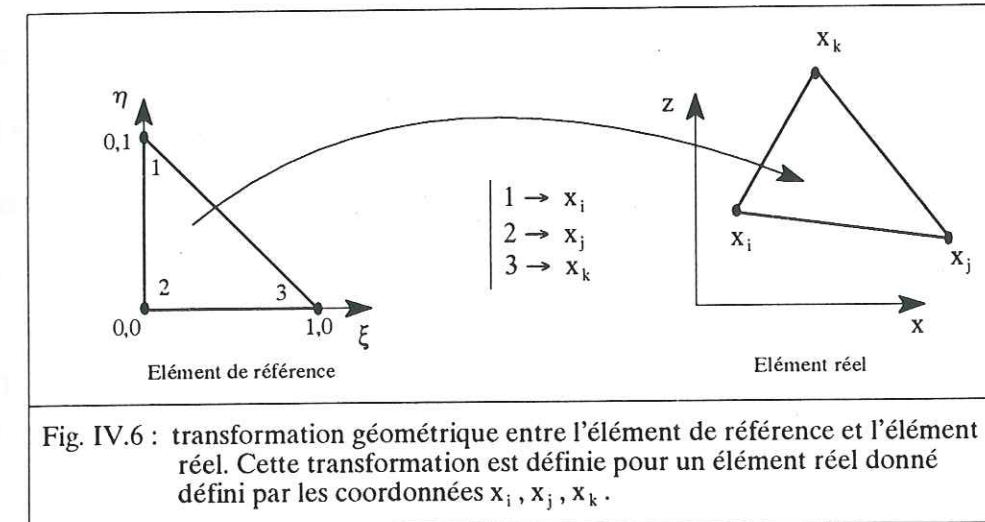
$$K_{ij}^{21} = \int_{V_e} \mu^e \frac{\partial \phi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e}{\partial z} dV_e \quad (IV.18)$$

Le type d'élément choisi pour cette étude est une paire de Taylor - Young d'ordre deux pour les vitesses et d'ordre un pour la pression (dénomination  $P_2 - P_1$ ). Il existe deux configurations géométriques permettant de réaliser cet élément : le triangle à six noeuds ou le quadrilatère à 8 ou 9 noeuds. De plus ces deux géométries peuvent avoir des arêtes rectilignes ou curvilignes. Dans cette étude c'est le triangle à bords droits qui a été choisi. Sur la figure IV.5 suivante sont présentées la localisation des variables élémentaires et la numérotation locale des noeuds de l'élément :



Les fonctions  $\phi_i^e$  dépendent des coordonnées géométriques de l'élément utilisé. Pour pallier à cet inconvénient on procède à un changement de coordonnées dont

le but est d'associer au triangle réel un triangle de référence permettant des calculs plus simples, mais également l'utilisation des formules d'intégration numérique de Gauss. La transformation géométrique est schématisée dans la figure IV.6 :



Les nouvelles coordonnées sont  $\xi$  et  $\eta$ . Dans ce système de référence les six fonctions servant à la décomposition polynomiale des vitesses sont :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_1(\xi, \eta) = -\eta + 2\eta^2 \\ \tilde{\phi}_2(\xi, \eta) = 1 - 3\xi - 3\eta + 2\xi^2 + 4\xi\eta + 2\eta^2 \\ \tilde{\phi}_3(\xi, \eta) = -\xi + 2\xi^2 \\ \tilde{\phi}_4(\xi, \eta) = 4\eta - 4\xi\eta - 4\eta^2 \\ \tilde{\phi}_5(\xi, \eta) = 4\xi - 4\xi\eta - 4\xi^2 \\ \tilde{\phi}_6(\xi, \eta) = 4\xi\eta \end{cases} \quad (IV.19)$$

et celles pour la pression sont :

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_1(\xi, \eta) = \eta \\ \tilde{\psi}_2(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \\ \tilde{\psi}_3(\xi, \eta) = \xi \end{cases} \quad (IV.20)$$

Le tilde sur les fonctions est là pour rappeler qu'elle sont maintenant définies sur



l'élément de référence. On remarquera que chacune de ces fonctions s'annule pour tous les noeuds ne correspondant pas à son indice et prend la valeur 1 pour le noeud concerné. L'expression analytique de  $K_{ij}^{21}$  contient des dérivations par rapport aux coordonnées  $x$  et  $z$ , il faudra donc les convertir en dérivation par rapport aux nouvelles coordonnées ( $\xi$  et  $\eta$ ) en utilisant la règle de composition des dérivations (voir Annexe A6). De plus on passe d'une intégration sur le sous-domaine  $V_e$  au domaine de référence  $V_r$ , ce qui va entraîner une transformation de l'intégrale elle-même (voir Annexe A6). Le résultat final est le suivant :

$$K_{ij}^{21} = \int_{V_r} \tilde{\mu}^e \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) J dV_r \quad (\text{IV.21})$$

Dans cette expression  $\tilde{\mu}^e$  est la viscosité considérée dans le nouveau système de coordonnées et  $J$  est le jacobien de la transformation géométrique permettant de passer de l'élément réel à celui de référence.

Abordons maintenant la question du calcul de la viscosité. Cette viscosité dépend de l'invariant des taux de déformation qui eux-mêmes dépendent des expressions des deux vitesses  $U$  et  $W$ . J'ai été ainsi amené à utiliser pour sa représentation la représentation polynomiale des vitesses :

$$\tilde{\mu}^e(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 \mu_i^e \tilde{\varphi}_i(\xi, \eta) \quad (\text{IV.22})$$

Le calcul effectif des éléments de la matrice globale s'obtient en général grâce à une intégration numérique de Gauss. Néanmoins l'élément triangulaire à bords

<sup>1</sup> Le jacobien est le déterminant de la matrice jacobienne qui exprime le changement du vecteur Nabla lors d'un changement de coordonnées.

rectilignes et à six noeuds est relativement simple ce qui m'a amené à développer des calculs analytiques pour toutes les expressions rencontrées dans les formules.

### $\beta$ ) assemblage des matrices élémentaires

Le fond de la procédure a déjà été expliqué. Il reste à la mettre en oeuvre. Tout d'abord il faut connecter la numérotation locale à la numérotation globale. Pour cela on construit une table (dite de connectivité) à six colonnes et à autant de rangs qu'il y a d'éléments composant le domaine fluide (notons ce nombre Nelemax). Puis on remplit chaque rang avec les numéros globaux des six noeuds de l'élément.

Ensuite il faut construire une autre table qui pour chaque noeud donne la somme du nombre de variables attachées à tous les noeuds qui le précèdent selon l'ordre de la numérotation globale. On en fait usage par exemple lors de l'insertion des conditions aux limites. Ce sont les deux étapes les plus fastidieuses de l'implémentation. Ces deux tables permettent d'en construire une troisième (notons la locE) à  $15 = (2 \cdot 6 + 3)$  colonnes et à Nelemax rangs qui permet de localiser cette fois les variables de l'élément au sein de l'ensemble global des variables. Conjointement à ces définitions de tables, il est nécessaire de minimiser la largeur de bande de la matrice globale. Il n'existe pas de règle générale pour effectuer cette minimisation. Il faut seulement contrôler "au mieux" l'ordre global des variables.

Pour des questions pratiques de place mémoire l'ordonnancement des variables  $U$ ,  $W$  et  $P$  dans l'élément est le suivant :



$$(U_1 W_1 P_1 \quad U_2 W_2 P_2 \quad U_3 W_3 P_3 \quad U_4 W_4 \quad U_5 W_5 \quad U_6 W_6).$$

Cet ordre est différent de celui utilisé précédemment pour la définition des matrices élémentaires (voir éq. IV.14). Il faut donc utiliser une table supplémentaire assurant le transfert entre les deux ordonnancements. La procédure d'assemblage est la suivante :

$$K_{locE(i), locE(j)} = K_{ij}^e \quad \text{pour } i \text{ et } j \in [1, 15] \text{ et pour tout } e \quad (\text{IV.23})$$

γ) calcul des intégrales de volume

Il s'agit de calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{V_e} \varphi_j^e f_\lambda^e dV_e \quad (\text{IV.24})$$

où  $f_\lambda^e$  est soit  $f_x^e$ , soit  $f_z^e$  les deux composantes de la densité de force volumique. Elle sera transformée en effectuant le changement de variables. Dans les cas traités, la densité est prise constante ce qui rend ces intégrales élémentaires à calculer.

δ) imposition des conditions aux limites essentielles

Les deux vitesses  $U$  et  $W$  peuvent être simultanément ou séparément imposées en un point du maillage de la surface. Pour introduire ces conditions dans le système d'équations il y a deux moyens :

# transformer le système de la façon suivante : soit  $N_v$  le numéro de la variable concernée et  $VAR_{N_v}$  la valeur imposée, on modifie  $K_{N_v, N_v}$  en

$(K_{N_v, N_v} + \alpha)$  (où  $\alpha = 10^{\text{très grand}}$ ) et  $F_{N_v}$  en  $(\alpha * VAR_{N_v})$ . Ce procédé joue sur le rapport  $(1+\alpha)/\alpha$  qui est voisin de l'unité. Néanmoins cette méthode ne donne pas toujours de résultats satisfaisants car une partie des calculs se fait à la limite de précision de l'ordinateur.

# considérons le système d'équations suivant ( $K$ ,  $U$  et  $F$  réfèrent respectivement à une matrice, à la solution à trouver et au terme du second membre, sans lien avec les notations antérieures) :

$$K_{11} U_1 + K_{21} U_2 + K_{31} U_3 = F_1$$

$$K_{12} U_1 + K_{22} U_2 + K_{32} U_3 = F_2$$

$$K_{13} U_1 + K_{23} U_2 + K_{33} U_3 = F_3$$

et supposons que l'on veuille imposer  $U_2$  à la valeur  $U_{\text{imposée}}$ , il faut alors le modifier de la façon suivante :

$$K_{11} U_1 + 0 + K_{31} U_3 = F_1 - K_{21} * U_{\text{imposée}}$$

$$0 + 1 * U_2 + 0 = U_{\text{imposée}}$$

$$K_{13} U_1 + 0 + K_{33} U_3 = F_3 - K_{23} * U_{\text{imposée}}$$

Pour obtenir dans la pratique cette nouvelle forme du système, il faut procéder ainsi (dans l'ordre) :

i) si  $N_v$  est le numéro de la variable à imposer on change les



composantes  $F_j$  en  $(F_j - K_{Nv,j} * \text{valeur imposée})$  pour  $j \neq Nv$ .

ii) la colonne  $K_{Nv,j}$  et la ligne  $K_{j,Nv}$  voient leurs valeurs remplacées par 0.

iii)  $K_{Nv,Nv}$  prend la valeur 1.

iv)  $F_{Nv}$  est remplacé par la valeur imposée.

C'est cette dernière méthode qui a été utilisée.

#### ε) calcul des intégrales de surface

En tous les noeuds où au plus une condition de vitesse a été imposée il faut imposer les forces surfaciques. Pour mémoire ces intégrales sont du type :

$$F_j^{e,\lambda} = \int_{\text{bord extérieur}} \varphi_j^e (\sigma_{x\lambda}^e n_x^e + \sigma_{\lambda z}^e n_z^e) dl^e \quad \text{où } \lambda = x \text{ ou } z \quad (\text{IV.25})$$

La quantité entre parenthèses est la densité surfacique de force  $T^{e,\lambda}$  appliquée sur le côté de l'élément coïncidant avec la surface extérieure. Cette intégrale sera tout d'abord transformée pour être calculable sur l'élément de référence (voir annexe A6). Une façon d'introduire  $T^{e,\lambda}$  est de l'écrire sous la forme :

$$T^{e,\lambda}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 T_i^{e,\lambda} \tilde{\varphi}_i(\xi, \eta) \quad \text{avec } \xi = 0 \text{ ou } \eta = 0 \quad (\text{IV.26})$$

compte tenu des propriétés des fonctions  $\tilde{\varphi}_i$ , seules celles qui ont un numéro égal à un des numéros locaux du bord extérieur de l'élément ne s'annulent pas. En reportant l'expression de  $T^{e,\lambda}$  dans l'intégrale et en sortant le signe somme  $\Sigma$  on obtient des intégrales faciles à calculer.

#### ζ) résolution du système d'équations

La matrice globale du système matriciel est toute entière contenue dans une bande symétrique autour de la diagonale. Il est alors avantageux de stocker en mémoire uniquement la partie supérieure de la bande plutôt que la matrice en entier. Néanmoins, ce stockage complique beaucoup la programmation d'une méthode "d'inversion" de la matrice globale.

Il existe deux grands groupes de méthodes "d'inversion" : les méthodes directes et les méthodes itératives. Pour ces dernières il n'existe de théorèmes de stabilité que dans le cas où la matrice ne possède que des termes diagonaux strictement positifs (matrice définie positive), et ceci n'est pas vrai dans notre cas. De plus, elles requièrent un pré-conditionnement de la matrice et cette procédure est particulièrement difficile à programmer. C'est donc tout naturellement que j'ai utilisé une simple procédure d'inversion par élimination de Gauss.

Cette méthode ne présente pas de difficultés particulières, bien que son utilisation sur une matrice stockée en mémoire uniquement par sa bande supérieure nécessite un programme assez fastidieux à mettre au point. De plus, la présence de termes diagonaux nuls oblige à procéder à des déplacements de lignes ayant pour conséquence de briser la symétrie de la matrice qu'il faut rétablir en déplaçant les colonnes correspondantes (voir figure IV.7).

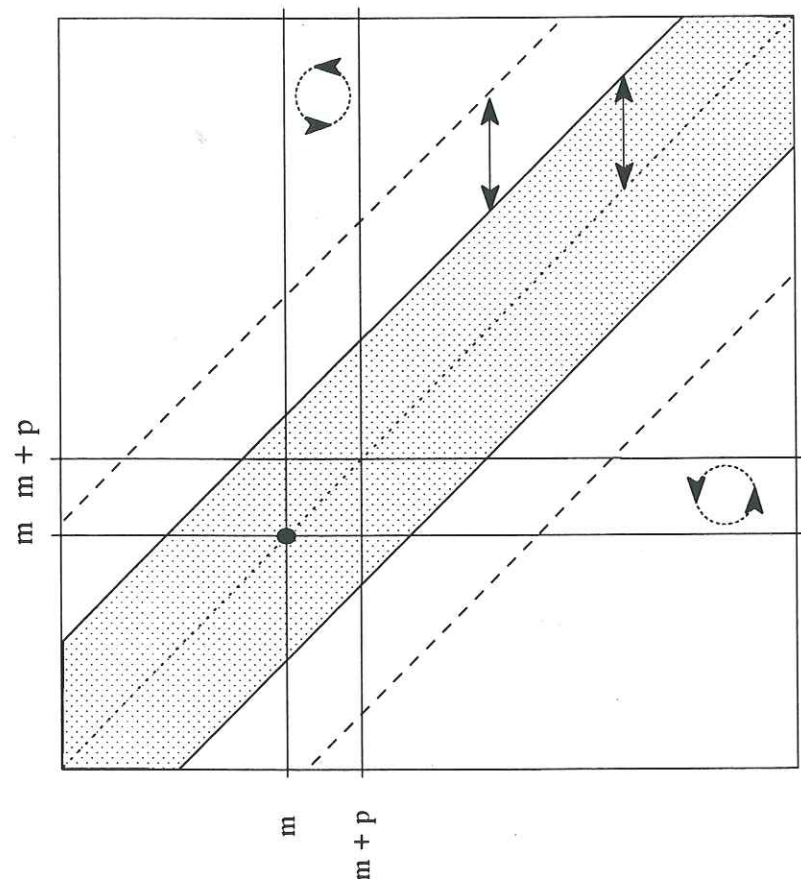
Les déplacements de colonnes -contrairement aux déplacements de lignes- modifient l'ordre des variables, il est donc nécessaire de garder la mémoire de ces changements dans une table qui permettra de rétablir l'ordre initial.

Le système matriciel résultant de la discrétisation est non-linéaire à cause de la



Fig. IV.7 :

La matrice  $K$  du système linéaire est représentée par sa bande (en grisé), sa "largeur de bande" (flèche en bas à droite) et sa diagonale (en petits pointillés). Les deux traits en gros pointillés représentent une extension de la bande de part et d'autre de la diagonale égale à une largeur de bande. "m" et "m+p" sont les indices de deux lignes de  $K$  dont la première est la "ligne pivot" avec un coefficient  $K(m,m)$  nul et la seconde une ligne telle que  $K(m,m+p) \neq 0$ . Cette seconde est donc amenée à remplacer la première par rotation. Mais alors elle déplacera des éléments de matrice hors de la bande initiale avec en sus une destruction de sa symétrie. Pour éviter ces deux effets il est nécessaire d'effectuer une rotation des deux colonnes "m" et "m+p" pour rétablir la symétrie et d'étendre la largeur de la bande. Cette dernière opération est suffisante car la valeur de "p" ne peut être telle que la ligne "m+p" sorte de la bande initiale.



viscosité. Cette viscosité dépend du champ de vitesse qui est précisément à calculer. Pour lever cette difficulté il est nécessaire de linéariser la matrice. Ceci sera obtenu en faisant l'hypothèse que la viscosité dépend du champ de vitesse calculé à un pas antérieur. On obtient ainsi un processus itératif dont la solubilité nécessite un champ de vitesse (ou de viscosité dans le cas présent) initial.

e) extension au 3D :

Tous les fondements explicités pour le cas du problème à deux dimensions sont valables en trois dimensions. La technique de discrétisation étant exactement la même, les conditions imposées pour le choix de l'élément sont aussi draconiennes. En deux dimensions il y avait deux types d'éléments : des triangles et les parallélogrammes. L'extension en trois dimensions est naturelle : soit des tétraèdres, soit des parallélépipèdes. Par convenance personnelle j'ai choisi un élément parallélépipédique, car la numérotation globale est plus facile à réaliser que pour les tétraèdres.

Pour obtenir une représentation exacte du second ordre pour les vitesses, cet élément est constitué de 27 noeuds. La pression étant interpolée par un polynôme du premier ordre, les sommets de l'élément seront ses noeuds d'interpolation.

Les fonctions d'interpolation  $N_v(\xi, \eta, \zeta)$  de la vitesse sont le produit de trois fonctions de base ne dépendant chacune que d'une seule des variables. En utilisant l'indéterminée  $\lambda$  qui peut être  $\xi$  ou  $\eta$  ou  $\zeta$ , leurs expressions analytiques sont :

$$-\lambda(1-\lambda)/2 \quad (1-\lambda^2)/2 \quad \lambda(1+\lambda)/2$$

De même pour les fonctions d'interpolation  $N_p(\xi, \eta, \zeta)$  de la pression, avec les deux



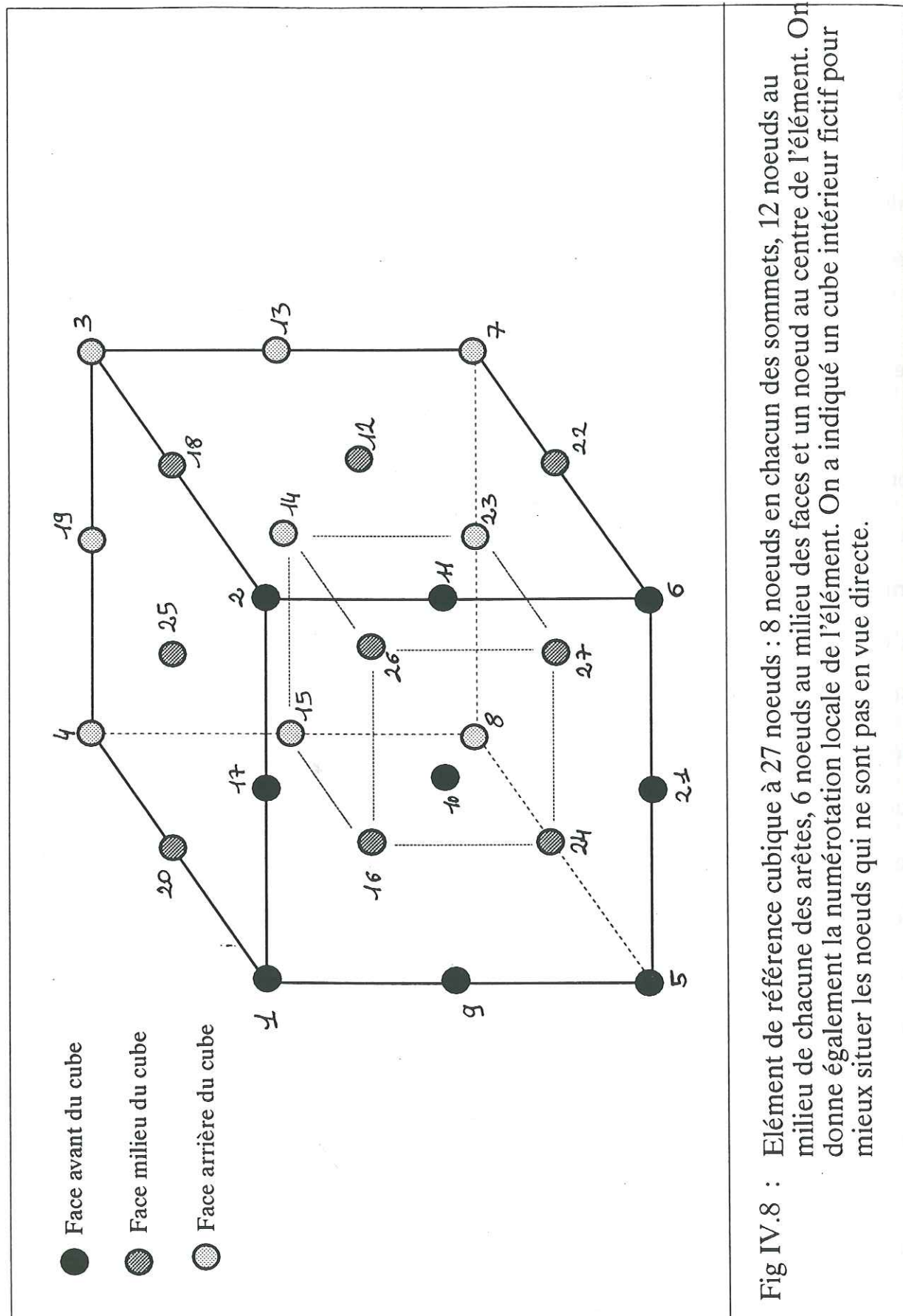


Fig IV.8 : Élément de référence cubique à 27 noeuds : 8 noeuds en chacun des sommets, 12 noeuds au milieu de chacune des arêtes, 6 noeuds au milieu des faces et un noeud au centre de l'élément. On donne également la numérotation locale de l'élément. On a indiqué un cube intérieur fictif pour mieux situer les noeuds qui ne sont pas en vue directe.

fonctions de base :

$$(1-\lambda)/2 \quad (1+\lambda)/2$$

La forme analytique des fonctions polynomiales d'interpolation est sensiblement plus lourde en 3D qu'en 2D et des calculs analytiques pour les coefficients des matrices et vecteurs-force de la méthode ne sont pas envisageables. Il est nécessaire de tout calculer avec des formules de quadrature de Gauss (voir Annexe A7).

La figure IV.8 permet de situer tous les noeuds de l'élément.

On se rappelle qu'il est nécessaire de faire évoluer les surfaces libres. Le schéma numérique qui calculera les nouvelles positions des points de la surface pose le problème suivant : comment reconstituer une surface à partir de ces nouveaux points ? Etant donné que par quatre points (les quatres sommets étant sur la surface extérieure) il ne passe pas en général de plan, un élément à faces planes n'est pas envisageable. Il faut donc recourir à la version avec surfaces gauches. Ainsi les surfaces seront correctement prises en compte.

f) extension au cas non-stationnaire :

Le contenu de ce chapitre est valable autant pour le 2D que pour le 3D. Jusqu'à présent les termes dépendant du temps avaient été omis de la présentation générale. Pour fixer les idées je travaillerai avec le problème en 2D :



$$\text{div}(\sigma) + f = \rho \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\text{div}(U) = 0$$

Si on utilise la relation constitutive d'un fluide on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (2\mu \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu (\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x})) - \frac{\partial P}{\partial x} + f_x = 0 \\ -\rho \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (2\mu \frac{\partial W}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial x} (\mu (\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x})) - \frac{\partial P}{\partial z} + f_z = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.27})$$

U et W sont les vitesses horizontale et verticale, P la pression,  $\rho$  la densité du matériaux et t le temps. Dans le problème non-stationnaire les valeurs nodales des variables dépendent du temps. La mise sous forme variationnelle est similaire à celle présentée pour le cas stationnaire ; elle ne sera donc pas présentée. La discrétisation temporelle sera étudiée à partir du terme  $\rho \frac{\partial U}{\partial t}$ .

$$\left| \begin{array}{l} \int_{V_e} \rho \frac{\partial U^e(x,z,t)}{\partial t} \varphi_j^e dV_e = \int_{V_e} \rho \varphi_j^e \frac{\partial}{\partial t} [\sum_{i=1}^6 U_i^e(t) \varphi_i^e(x,z)] dV_e \\ = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial U_i^e(t)}{\partial t} \int_{V_e} \rho \varphi_i^e \varphi_j^e dV_e = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial U_i^e(t)}{\partial t} M_{ij}^e \end{array} \right. \quad (\text{IV.28})$$

Cette suite d'égalités fait apparaître une matrice (ici au niveau élémentaire). La réunion de ces matrices au cours de la procédure d'assemblage formera une matrice globale M appelée la matrice masse du système. La description de la discrétisation temporelle qui va suivre est tirée de l'ouvrage de Raviart et Thomas

[36]. Reprenons la première des équations du système d'équations (IV.27). Une traduction de cette équation peut être :  $U'(t) = \Lambda(t, U(t))$  pour  $0 \leq t \leq T$ .

On commence par introduire un découpage de l'intervalle  $[0, T]$  que l'on peut prendre uniforme pour simplifier : on définit donc un pas de temps  $\Delta t = T/N$ , associé à un entier  $N \geq 1$ , et on pose  $t_n = n \Delta t$  pour  $0 \leq n \leq N$ . On va chercher une approximation  $U_n$  de  $U(t_n)$  pour  $n = 0 \dots N$ . Pour cela on va utiliser une méthode simple et classique : la  $\theta$ -méthode où  $\theta$  est un paramètre appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ . Elle consiste à remplacer l'équation différentielle précédente par le schéma aux différences finies suivant :

$$(U_{n+1} - U_n) / \Delta t = \theta \Lambda(t_{n+1}, U_{n+1}) + (1-\theta) \Lambda(t_n, U_n)$$

Selon les valeurs prises par le paramètre  $\theta$ , on obtiendra divers schémas présentés dans le tableau suivant :

#### Type de schémas :

- $\theta = 0$  : méthode explicite ou Euler progressif (ou "forward").
- $\theta \neq 0$  : méthode implicite.
- $\theta = 1/2$  : Crank - Nicholson.
- $\theta = 1$  : Euler régressif (ou "backward").

#### Stabilité :

- pour  $0 \leq \theta < 1/2$ , le schéma est conditionnellement stable.
- pour  $\theta \geq 1/2$ , le schéma est stable sans condition.

#### Erreur d'approximation :

- si  $\theta \neq 1/2$  l'erreur est en  $\Delta t$
- si  $\theta = 1/2$  l'erreur est en  $(\Delta t)^2$



La formulation variationnelle du problème fournit un système qui peut s'écrire :

$$\begin{cases} \rho M \frac{\partial \vec{\xi}(t)}{\partial t} + K \vec{\xi}(t) = \vec{F}(t) \\ \vec{\xi}(t=0) = \vec{\xi}_0 \quad \text{condition initiale} \end{cases} \quad (\text{IV.29})$$

où  $\vec{\xi}(t)$  est le vecteur solution  $(U, W, P)$ ,  
 $K$  la matrice déjà rencontrée,  $M$  la matrice  
masse, et  $\vec{F}(t)$  le vecteur force.

On applique la  $\theta$ -méthode sur cette équation :

$$\frac{\rho}{\Delta t} M (\vec{\xi}^{n+1} - \vec{\xi}^n) + K (\theta \vec{\xi}^{n+1} + (1-\theta) \vec{\xi}^n) = \theta \vec{F}^{n+1} + (1-\theta) \vec{F}^n \quad (\text{IV.30})$$

Ainsi à chaque pas de temps on obtient un système de la forme :

$$\begin{cases} (\rho M + \theta \Delta t K) \vec{\xi}^{n+1} = \vec{\eta}^n \\ \text{où } \vec{\eta}^n \text{ contient tous les termes dépendant de } n \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

L'introduction de la non-stationnarité dans un programme stationnaire ne pose donc pas de problème majeur et peut être conduite par l'introduction de quelques sous-programmes supplémentaires dans le code.

Remarque : La  $\theta$ -méthode n'est pas la seule façon de discrétiser la dérivée temporelle.

#### g) Traitement numérique de l'évolution des surfaces libres :

L'évolution d'une surface libre est soumise à une équation du type "équation de transport à coefficients non-linéaire". Pour la simplicité de l'exposé la présentation sera concentrée sur le cas à une dimension d'espace. Ainsi si  $h(x,t)$  est la fonction représentant une surface libre du problème on a :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U_{\text{surf}} \frac{\partial h}{\partial x} = W_{\text{surf}} \quad (\text{IV.32})$$

où  $U_{\text{surf}}$  et  $W_{\text{surf}}$  sont respectivement  
les vitesses horizontale et verticale  
prises sur la surface.

Pour résoudre une telle équation on peut soit utiliser des différences finies, soit des éléments finis. Je ne connais pas de résultats numériques sur ce type d'équation. Néanmoins, il est possible d'étudier la qualité des schémas sur l'équation de base du transport pour laquelle  $U_{\text{surf}}$  est constante et  $W_{\text{surf}} = 0$ . La très grande majorité des auteurs utilisent des schémas aux différences finies. Les éléments finis n'ont pratiquement pas été exploités dans les problèmes à une dimension. Quant aux problèmes à deux ou trois dimensions ils sont exclusivement traités en différences finies. On en trouvera une revue quasi exhaustive dans l'article de R.B. Rood [37]. Lorsque j'ai dû introduire le changement des surfaces libres dans le programme je ne disposais pas de la référence de l'article. J'ai donc utilisé un exposé des méthodes les plus simples de l'ouvrage [38]. Elles sont résumées dans la figure IV.9 ci-contre. Ces schémas sont des discrétisations élémentaires de l'équation de transport simplifiée. A l'aide du tableau on constate que le choix dépend du signe de la vitesse  $U_{\text{surf}}$  dans le repère utilisé.



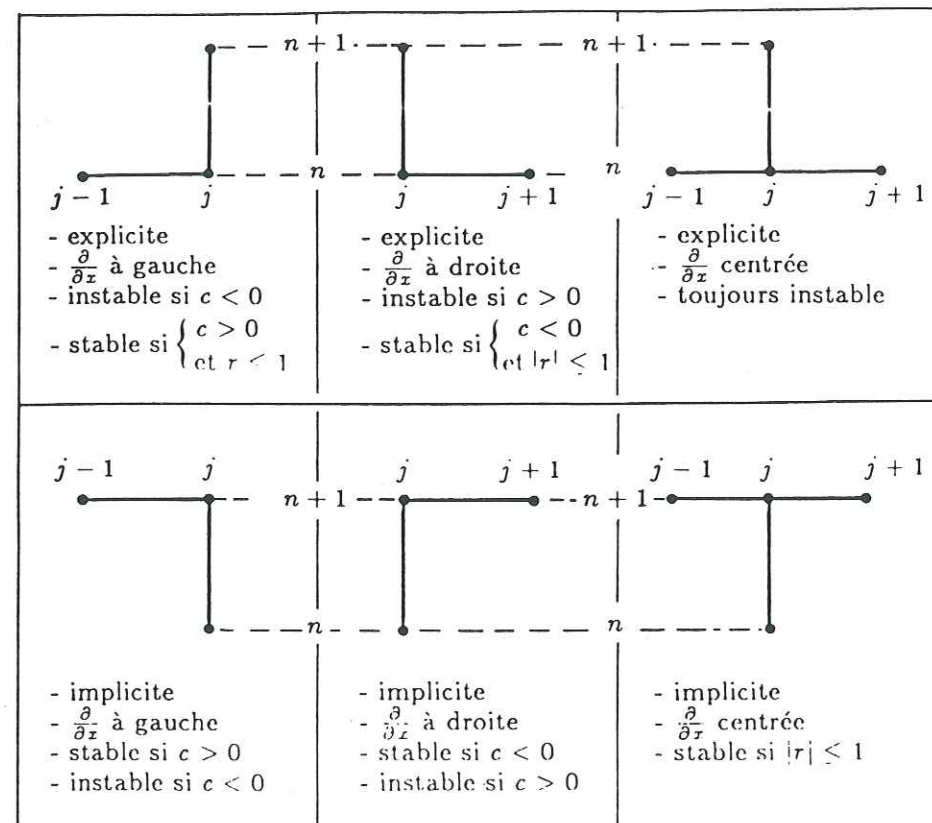


Fig. IV.9 : Divers schémas de discrétisation de l'équation :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \left( r = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)$$

D'après les conventions décrites au chapitre II) l'axe Ox est pointé dans le sens de l'écoulement :  $U_{\text{surf}}$  est donc positive. Etant donné qu'il faut toujours choisir le schéma le plus stable possible, celui qui doit retenir l'attention est celui pour lequel le schéma temporel est eulérien régressif et le schéma spatial à dérivée horizontale rétrograde (carreau en bas à gauche de la figure IV.9).

Ce schéma s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{dt} + U_{\text{surf},i}^{n+1} \left[ \frac{h_i^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}}{dx} \right] = W_{\text{surf},i}^{n+1} \quad (\text{IV.33})$$

La résolution de ce schéma nécessite de se donner la valeur de la surface libre au premier noeud de la discrétisation spatiale. On obtient ensuite une formule de récurrence qui permet de calculer  $h_i^{n+1}$  en fonction de  $h_{i-1}^{n+1}$  pour  $i \geq 2$ .

L'utilisation de ce schéma pour l'équation générale ne peut être qu'une extrapolation mais il m'a semblé que les conditions de stabilité pour le cas le plus simple devaient être au moins nécessaires dans le cas général. Cela s'est avéré exact en partie car on perd la stabilité totale au détriment d'une stabilité conditionnelle.

#### h) Tests de validation des programmes :

##### α) présentation

Lorsqu'on désire résoudre numériquement un problème, le choix d'une méthode numérique et l'écriture du programme associé ne sont que la partie émergée de l'iceberg. Le gros du travail consiste à s'assurer de la qualité du programme et de la précision de la méthode. Pour atteindre ce but, il convient



d'effectuer le plus de tests possibles. J'ai utilisé deux familles de tests : les écoulements dont on connaît une solution théorique et ceux dont seule une solution numérique est disponible dans la littérature mais qui servent de référence. En deux dimensions, la première catégorie contient les solutions pour l'écoulement de Poiseuille pour un fluide incompressible soit newtonien (de l'eau par exemple), soit non-newtonien (la glace). Dans l'autre catégorie, les écoulements disponibles sont plus nombreux. Pour mes besoins j'en ai utilisé 3 : l'écoulement de la "driven cavity" pour un fluide de viscosité constante, puis deux écoulements tirés de la littérature glaciologique. Le module d'évolution des surfaces libres a été testé sur un écoulement défini exclusivement pour cette thèse. Les variables du problème sont les vitesses et la pression, or la viscosité de la glace est calculée à partir des gradients des vitesses ; il a donc fallu trouver un moyen de les calculer et de tester le module associé. Pour finir, le programme d'éléments finis 3D a été testé sur quelques écoulements de base (Poiseuille et chenal rectangulaire).

#### *β) écoulement de Poiseuille pour l'eau et la glace*

Ces écoulements sont les plus simples que l'on puisse utiliser pour tester les programmes construits pour cette thèse. Leur but est de vérifier la validité du programme dans les points suivants : tester tous les modules du programme, tester la précision des calculs pour diverses densités de maillage, tester tous les types de conditions aux limites (vitesses, forces, mélange des deux). Pour la glace, on teste également l'adéquation du module de calcul des gradients et de la viscosité. Les résultats sont excellents et la précision est optimale : les solutions

calculées sont identiques aux solutions théoriques. On a constaté que lorsqu'on utilise beaucoup de conditions aux limites du type "forces" la précision diminue légèrement. C'est pourquoi on a toujours utilisé le plus possible de conditions du type "vitesses"

#### *γ) écoulement de la "driven cavity"*

Cet écoulement est l'un de ceux les plus fréquemment utilisés pour tester les méthodes numériques appliquées aux fluides. On considère un fluide newtonien non-pesant dans une cavité carrée. Ce fluide est entraîné par le haut avec une vitesse constante. Il faut déterminer les champs de vitesses et de pression au sein du fluide. Ce test permet généralement de voir les changements dans les champs calculés en fonction du nombre de Reynolds du fluide. Dans notre cas on se souvient que les termes de convection ont été simplifiés à cause de la grande viscosité de la glace ; on doit donc obtenir des résultats typiques des faibles nombres de Reynolds. De plus, le fluide de la cavité est mis en rotation : cet effet doit donc être observé. Je présente deux graphes : les trajectoires (fig. IV.10) et le champ de pression (fig. IV.11).



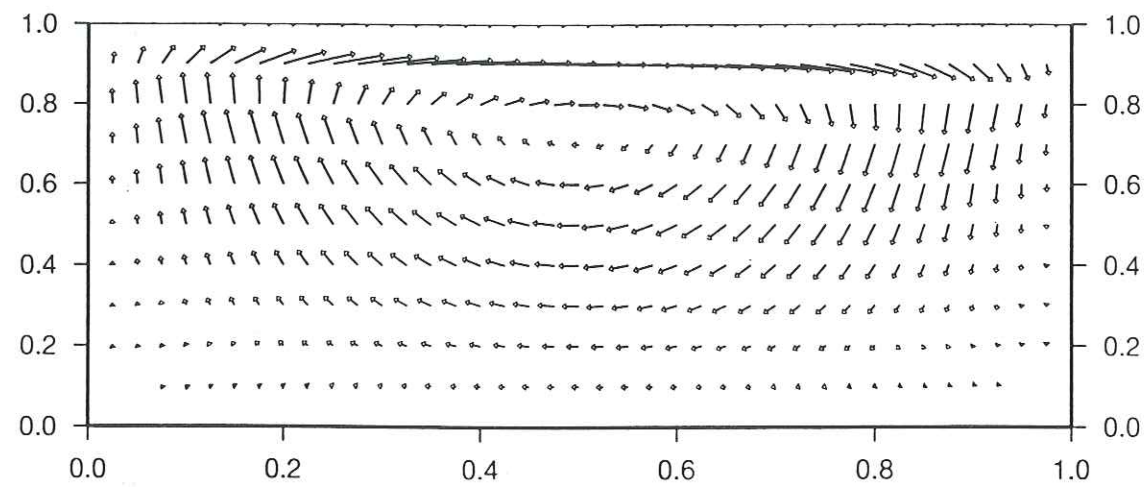


Fig. IV.10 : lignes de courant pour l'écoulement de la "driven cavity".

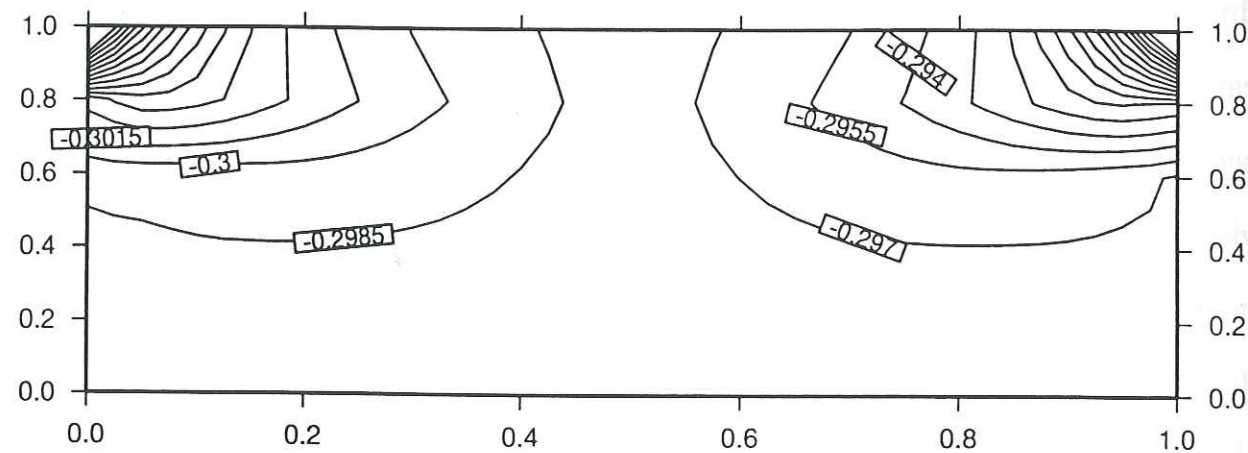


Fig. IV.11 : isolignes de la pression pour l'écoulement de la "driven cavity".

#### δ) écoulement dans un chenal rectangulaire

En 1964 John Nye a publié un article [39] dans lequel il donne des résultats pour des écoulements de glace dans des chenaux de formes cylindrique, elliptique et rectangulaire. Les écoulements sont supposés être invariant le long de la

direction principale, ce qui donne des problèmes à deux dimensions. Seul le chenal cylindrique permet d'obtenir une solution analytique en coordonnées cylindriques. Nye considère aussi des chenaux elliptiques dont la section est une  $\varepsilon$ -variation de la section cylindrique, ce qui lui permet d'obtenir des solutions par perturbation des solutions du chenal cylindrique. Pour les chenaux rectangulaires, il donne des solutions numériques en fonction du rapport d'aspect "largeur / épaisseur". Le programme a été testé sur ce dernier type de chenaux et pour le cas particulier où le rapport d'aspect vaut 3. La vitesse horizontale est présentée pour les deux études dans un but de comparaison (figure IV.12 et IV.13).

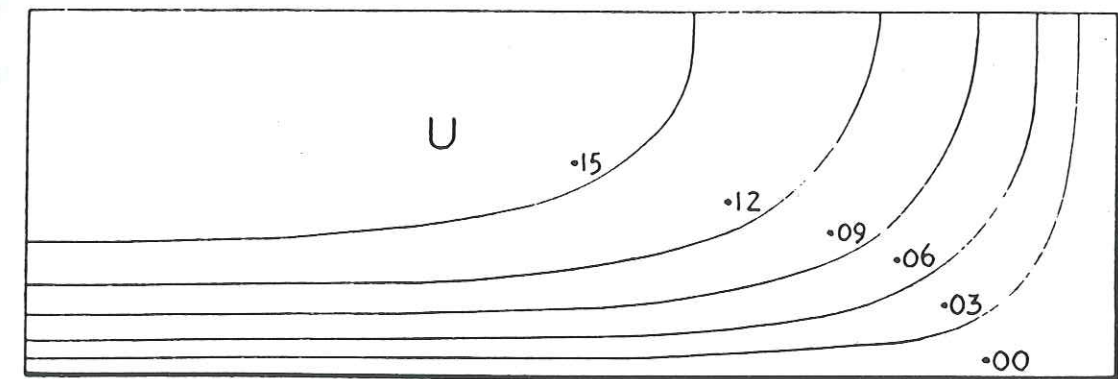


Fig. IV.12 : isolignes de la vitesse horizontale pour l'écoulement uniforme dans un chenal rectangulaire. Calculs effectués par J. Nye [20].

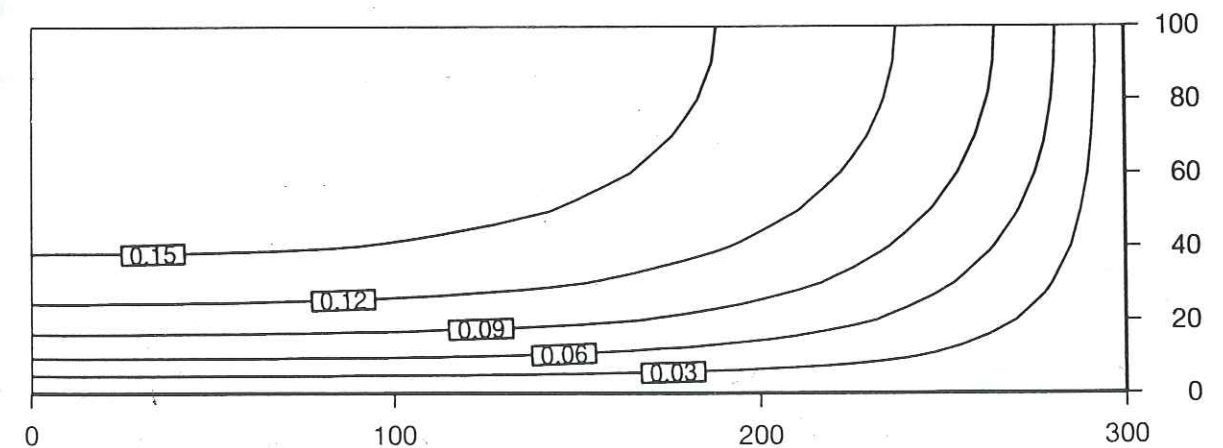


Fig. IV.13 : isolignes de la vitesse horizontale pour l'écoulement uniforme dans un chenal rectangulaire. Calculs effectués à l'aide de mon programme.



### ε) écoulement dans une diffluence de glace

En 1983 C.F. Raymond publie "Deformation in the vicinity of ice divides" [40]. L'étude a pour but de déterminer les vitesses et les contraintes dans une zone de diffluence de glace symétrique et à deux dimensions. La modélisation adoptée est la suivante (figure IV.14) :

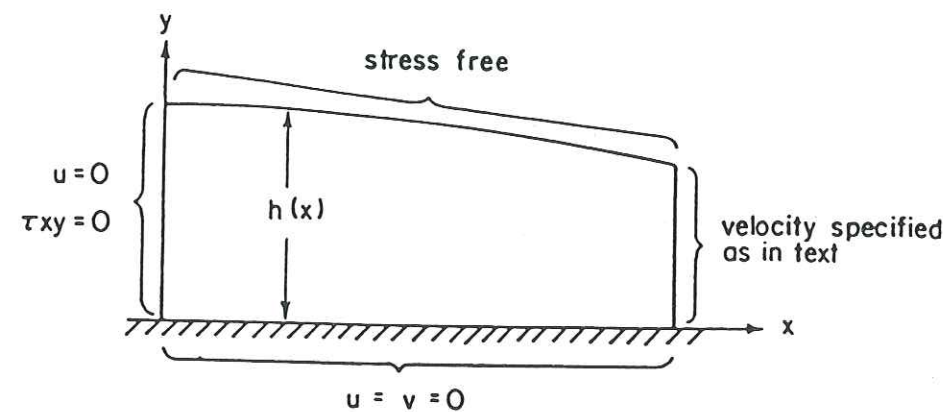


Fig. IV.14 : Section verticale idéalisée d'une diffluence symétrique à deux dimensions.

Sa méthode de calcul utilise une formulation par éléments finis permettant une interpolation linéaire de la vitesse sur des quadrilatères. La surface supérieure n'est pas ajustable au champ de vitesse calculé. Mes calculs ont fourni les mêmes résultats.

### ζ) écoulement au-dessus d'une bosse

Pour tester le module d'évolution des surfaces libres je n'ai trouvé aucun écoulement qui puisse l'invalider ou le valider. J'ai donc décidé de construire un

test propre à mes besoins. J'ai considéré un écoulement de Poiseuille qui se ferait sur un plan présentant une petite protubérance. Les proportions de cette bosse sont petites comparées à l'épaisseur de la nappe fluide. Sur ce test je ne possède a priori aucune solution théorique ou numérique, néanmoins, il est possible de déterminer certaines caractéristiques de la surface d'équilibre de cet écoulement. La bosse étant suffisamment petite, la perturbation sur les solutions du Poiseuille pur seront minimales ; l'écoulement étant supposé rester laminaire, la surface supérieure devrait présenter elle aussi une bosse qui devrait être d'amplitude plus faible que la bosse basale et dont l'étalement devrait être plus important et dirigé dans la direction d'écoulement.

La simulation permet de retrouver ces caractéristiques.

### η) écoulement de Poiseuille en 3D

Le test est similaire à celui fait en β). La seule différence réside dans l'invariance de la solution dans la direction latérale perpendiculaire à la direction d'écoulement. Les commentaires sont également identiques.

### θ) écoulement dans un chenal rectangulaire en 3D

Ce test est en fait celui correspondant réellement aux hypothèses de l'étude de J. Nye : les solutions ne doivent pas dépendre de la direction d'écoulement. L'inconvénient de ce test réside dans la non-connaissance de la solution théorique : on doit donc utiliser le test δ) en le faisant tourner sur un maillage fin et récupérer une partie de la solution pour s'en servir de conditions aux limites aval



et amont. La précision est excellente mais n'est pas optimale car la solution donnée en condition aux limites n'est pas optimale.

1) *test de la méthode de calcul des gradients*

Les gradients sont calculés à partir des résultats sur les vitesses : ce sont donc des sous-produits. Le problème de leur calcul provient de la discontinuité de la dérivée normale entre deux éléments. Il est donc nécessaire de procéder d'une façon ou d'une autre à une moyenne de ces valeurs pour obtenir un champs utilisable dans le calcul de la viscosité de la glace. On peut effectuer cette moyenne de deux façon : soit moyenner les gradients puis calculer la viscosité, soit calculer les viscosités puis en faire la moyenne. C'est la première méthode qui marche le mieux. Le module de calcul de la viscosité calcule les gradients pour chaque noeud local de chaque élément puis, pour un noeud global, on fait la moyenne sur tous les éléments ayant un noeud local correspondant à ce noeud global. On obtient ainsi un champ global de gradients qui permet de calculer la viscosité en chacun des points du maillage. Il a été possible de tester et de comparer cette méthode très simple avec les résultats de Lee [41].



## LA TRANSITION

### "ADHERENCE - ECOULEMENT LIBRE"

### A DEUX DIMENSIONS



## LA TRANSITION "ADHERENCE - ECOULEMENT LIBRE" A DEUX DIMENSIONS

### a) Introduction

Au chapitre I) le problème de la jonction calotte - ice shelf a été déplacé vers le problème d'un écoulement de glace qui s'effectue d'une zone où le frottement est fort à une zone où il est faible, voire nul. Cette caractérisation d'une zone de transition est plus générale que la notion restreinte de jonction calotte - ice shelf, et permet d'étendre les résultats à d'autres types de transitions existant dans un inlandsis. On se propose dans ce chapitre d'étudier le problème de la transition "adhérence - écoulement libre" qui est la modélisation la plus simple, mais aussi la plus fondamentale, des problèmes de transition "fort frottement - faible frottement". Replacée dans la chronologie de la thèse, l'étude du présent paragraphe est très tardive. Elle trouve sa motivation dans la parution d'un article de V. Barcilon et D. MacAyeal [42] recherchant une solution théorique au problème. Je trouvai là une possibilité de confronter mes résultats numériques sur la jonction calotte - ice shelf avec une solution théorique. Les deux problèmes n'étant cependant pas exactement les mêmes j'entrepris d'appliquer mon programme au nouveau problème.

On exposera les principaux résultats de Barcilon et MacAyeal, les simulations numériques auxquelles j'ai procédées et l'exposé de l'argumentation mathématique suivi d'un test numérique permettant de trancher la question.



b) Résultats principaux de l'étude de Barçilon - MacAyeal

Les auteurs ont cherché à résoudre le problème de la transition "adhérence - écoulement libre" en formulant les équations avec un paramètre perturbatif (la pente du socle  $\alpha$  est supposée être petite). Les solutions sont développées par rapport à  $\alpha$ , ce qui va créer une famille infinie dénombrable de systèmes d'équations lorsque les termes dépendant d'une même puissance de  $\alpha$  sont regroupés. A l'ordre zéro les solutions sont immédiates et correspondent à la statique du fluide (pente nulle). Le problème effectivement étudié par les auteurs correspond au système donné par l'ordre un. Leur formulation est exprimée non pas en variables primitives vitesses - pression mais à l'aide de la fonction de courant et de la vorticité. Avec ces deux nouvelles variables -liées aux vitesses par l'intermédiaire de leurs dérivées partielles- le problème se formule par un bi-laplacien. Pour leurs conditions aux limites le fait majeur réside dans l'imposition d'un écoulement de Poiseuille pur pour la condition à l'infini en amont et d'un écoulement du type chasse d'eau en aval. La suite des calculs est plus complexe, mais disons seulement que la solution est écrite sous la forme d'une transformée de Fourier qui est incorporée dans une équation dite de Wiener-Hopf. Cette étape fournit des expressions analytiques pour les deux vitesses, la pression et le cisaillement qui sont ensuite calculées numériquement. Les auteurs présentent des graphes (indispensables pour prendre conscience des résultats) uniquement pour la vitesse horizontale, la pression et le cisaillement. Les résultats les plus marquant concernent les deux derniers, car ces deux grandeurs présentent



des singularités non-bornées. Ces deux graphes sont reproduits à la figure V.1.

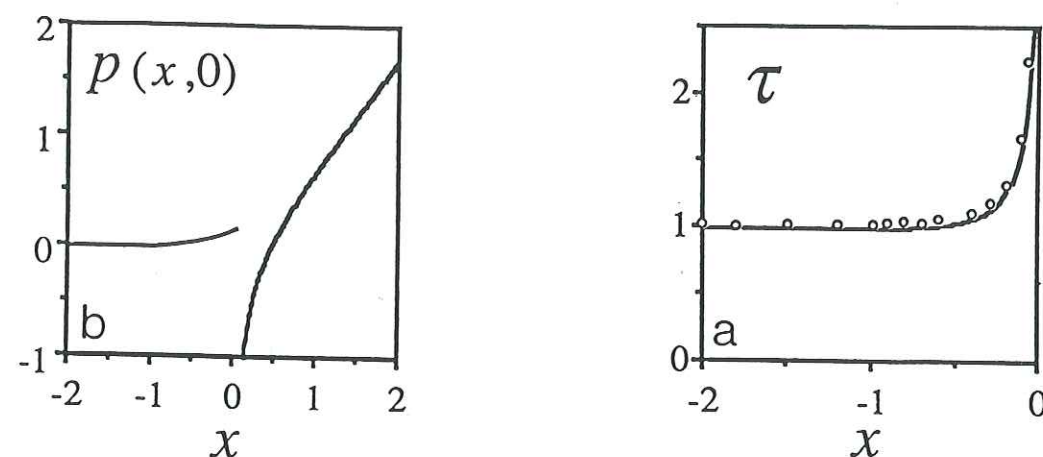


Fig V.1 : Valeurs basales ( $z = 0$ ) de la pression (à gauche) et de la contrainte de cisaillement (à droite). (d'après V. Barcion et D. MacAyeal [24])

Les critiques principales que nous (M. Dauge, M. Costabel et moi-même) portons sur cette étude concernent les trois points suivant :

i) la méthode de Wiener-Hopp est à appliquer pour résoudre un problème dans une bande de longueur infinie et d'épaisseur constante. Or par suite de l'évolution de la surface libre cette condition est caduque. Se pose donc avec acuité le problème de l'applicabilité de la méthode.

ii) les auteurs ont utilisé une méthode perturbative régulière. Selon M. Dauge ce point doit être testé car non trivial étant donné que la singularité existe mathématiquement (voir paragraphe V,d).

iii) les auteurs ont confondu "conditions aux limites physiques" et "conditions aux

limites mathématiques". En effet, s'il est réel que d'un point de vue physique l'écoulement loin en aval ne dépende quasiment pas de la coordonnée verticale, il n'en va pas de même d'un point de vue mathématique. Si l'on suppose que le champ de vitesse est constant dans tout le fluide très loin en aval, on montre sans difficulté que la surface libre présente un profil linéaire incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport au socle. Traduction : l'épaisseur du fluide augmente linéairement vers l'aval. Ce résultat a pour conséquence de rendre le champ de vitesse dépendant des coordonnées, amenant ainsi la contradiction interne aux hypothèses des auteurs.

### c) Simulation numérique du problème "adhérence - écoulement libre"

#### $\alpha$ ) Modélisation du problème

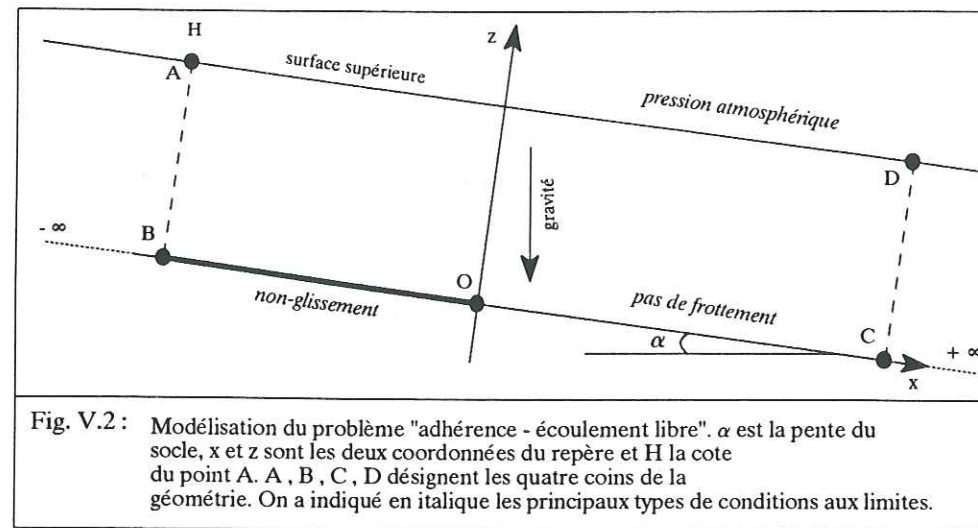
Le problème à résoudre est le suivant :

**" Un fluide pesant incompressible et de viscosité constante s'écoule de façon permanente sur un plan lisse, infini et uniformément incliné. Il existe un point (point de séparation) qui définit deux zones distinctes : en amont le fluide adhère et en aval le fluide est libre de toute force de frottement. Il s'agit de trouver les champs de vitesse, pression, contraintes et la surface libre d'équilibre. "**

La figure V.2 ci-dessous présente les éléments de base du problème. On y trouve : la géométrie de départ, le repère utilisé, la notation de divers paramètres



intervenant dans le problème et la description schématisée des conditions aux limites imposées à la frontière du domaine.



Les dimensions géométriques du domaine ABCD sont typiques pour des écoulements de glace : la pente  $\alpha = 0.0002$ , l'épaisseur vaut 850 m et la largeur BC, fixée à 40 Km, est grande par rapport à l'épaisseur.

La dynamique du fluide est décrite par les équations de Stokes incompressibles et stationnaires auxquelles on ajoute l'équation cinématique de la surface libre. On obtient donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \sin \alpha \\ 2\mu \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} = \rho g \cos \alpha \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \\ U_s \frac{\partial h}{\partial x} = W_s \end{array} \right. \quad (V.1)$$

où  $\mu$  est une viscosité constante dont la valeur est prise à  $10^5$  Pa.an,  $\rho$  la densité de la glace prise à  $917 \text{ Kg m}^{-3}$ , la gravité  $g$  est égale à  $9.83 \text{ m/s}^2$ , et  $U_s$  et  $W_s$  les vitesses de surface. Les autres grandeurs sont conformes aux conventions utilisées au cours de cette thèse.

La quatrième équation traduit la condition cinématique de surface libre qui doit être respectée in fine par le champ de vitesse. Afin de pouvoir adapter les surfaces libres du problème, il est nécessaire d'introduire une résolution itérative qui se fera par le biais de l'équation d'évolution (IV.32). Le paramètre  $t$  intervenant dans cette équation ne doit pas être compris comme un temps -puisque'on ne s'intéresse qu'à une solution stationnaire- mais comme un paramètre permettant de construire le processus itératif.

Les principales conditions aux limites sont les suivantes :

# sur AD la densité surfacique des forces extérieures  $\vec{T} = (T_x, T_z)$  se réduit à l'action de la pression atmosphérique qui est considérée comme complètement négligeable et prise égale à zéro :  $T_x = T_z = 0$ .

# sur BO : il y a adhérence donc  $U = W = 0$



# sur OC il n'y a pas de force de frottement, la force extérieure est donc orthogonale à la surface de contact :  $T_x = 0$ . Dans le repère utilisé, la composante horizontale est donc nulle. On fait de plus l'hypothèse que le fluide ne décolle pas après le point O d'où la condition supplémentaire  $W = 0$ .

Il importe maintenant de bien se rendre compte de la formulation implicite de ce problème : il existe un écoulement physique permanent, stable et borné qui est solution du problème. Ceci va imposer un certain nombre de contraintes sur la solution en vitesse. L'écoulement en amont du point O est soumis à un différentiel de vitesse entre le socle et la surface du fait du frottement. De même en aval -du moins assez loin de O- le différentiel ne peut exister ce qui rend la vitesse indépendante de la coordonnée verticale.

Dans la suite on utilise des notions telles que "infini", "écoulement à l'infini", "limite quand  $x$  tend vers l'infini" ; il s'agit d'abus de langage pour décrire que l'on se place très loin du point de séparation O.

Si une solution physique existe, la vitesse à l'infini doit être finie :

$$|\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \vec{U}(x,z)| < +\infty \quad (\forall z \in \text{Domaine}) \quad (\text{V.2})$$

Il est clair que physiquement les flux en  $\pm\infty$  doivent être également bornés. Ainsi, il faut que la surface libre supérieure ne croisse pas indéfiniment à l'infini, ce qui amène à la condition suivante :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{V.3})$$

De plus, en l'absence de perte ou de gain de masse par la surface supérieure on

doit avoir :

$$\int_{[AB]} \vec{U} \cdot \vec{n} \, dl + \int_{[CD]} \vec{U} \cdot \vec{n} \, dl = 0 \quad (\text{V.4})$$

La finitude des vitesses à l'infini implique une autre condition sur les vitesses :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{V.5})$$

Il reste maintenant à expliciter les deux conditions aux limites sur (AB) et (CD).

Il existe deux choix possibles : soit imposer  $U$  et  $W$ , soit imposer  $W$  et la composante longitudinale de la densité surfacique des forces extérieures. La raison de ce panachage de types de conditions aux limites résulte du choix délibéré de n'influencer les solutions en aucune manière. En effet choisir la vitesse horizontale  $U$  c'est poser a priori la nature de l'écoulement et imposer la composante verticale de la densité surfacique de force extérieure c'est imposer le cisaillement, ce qui signifie également imposer un certain type d'écoulement. On procédera aux expériences numériques en utilisant ces deux choix. Pour faciliter la présentation, on appellera "conditions naturelles" le premier choix de conditions aux limites et "conditions mixtes" le second.

Remarque : sauf précision contraire, les calculs sont effectués en faisant évoluer la surface libre.



### β) comment lire les diagrammes 3D

Tous les résultats relatifs aux vitesses, à la pression, et à la contrainte de cisaillement sont représentés à l'aide de diagrammes en 3D. Ces diagrammes représentent la grandeur physique sous la forme d'une surface ( $U$ ,  $W$ ,  $P$ , ou  $\sigma_{xz}$ ) en fonction des deux coordonnées  $x$  et  $z$  servant à définir le repère de travail. Sur chaque dessin il faut repérer :

- le point d'abscisse  $x = 20$  Km qui est le point de séparation  $O$  séparant les deux zones de frottement.
- la direction de l'écoulement de  $x = 0$  à  $40$  Km.
- la profondeur qui indique le haut du bas.

sur chaque dessin, l'information sur la variable considérée est donnée par l'allure de la surface, par les valeurs de la fonction et par les couleurs qui permettent de visualiser les gradients de la fonction.

remarque : l'orientation, par rapport au support du dessin, de la direction de l'écoulement varie d'un dessin à l'autre. Cela est dû à la nécessité de bien tourner la surface de façon à obtenir la meilleure visualisation possible. Par exemple, il n'est pas possible de représenter la vitesse horizontale et le cisaillement avec le même point de vue car leurs variations en fonction de la coordonnée  $z$  sont diamétralement opposées.

### γ) solution avec les conditions naturelles

Imposer  $U$  et  $W$  nécessite d'en connaître les expressions analytiques. La condition  $W = 0$  s'impose compte tenu de la condition  $\partial h / \partial x = 0$  à l'infini. Mais

l'expression de  $U_{-\infty}(z) = U(-\infty, z)$  nécessite une hypothèse physique supplémentaire : présumer (ou deviner) la nature de l'écoulement dans la zone d'adhérence loin du point de séparation  $O$ . L'hypothèse la plus "naturelle" est alors de supposer que l'écoulement loin en amont est un écoulement de Poiseuille dont le champ de vitesses est donné par :

$$U_{-\infty}(z) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2 \mu} [H_{-\infty}^2 - (H_{-\infty} - z)^2] \quad (V.6)$$

$H_{-\infty}$  est l'épaisseur quand  $x$  tend vers l'infini négatif. La vitesse aval loin du point  $O$  est donnée par la relation (II.2) sur les flux.

Les principaux résultats concernant ce jeu de conditions aux limites portent sur la vitesse horizontale (figure V.3) et le cisaillement (figure V.4). Trois faits caractérisent ces diagrammes :

- 1) le raccord des solutions aux extrémités du domaine est particulièrement mauvais, mettant ainsi en évidence un problème avec les conditions aux limites imposées.
- 2) hormis le problème du raccord aux extrémités les solutions présentent un comportement cohérent complètement différent de celui imposé par les conditions aux limites. On appellera solutions libres les deux solutions obtenues en oubliant les raccords.
- 3) la contrainte de cisaillement ne présente aucune tendance à la singularité non-bornée sur le socle au passage du point de séparation  $O$ .



## VITESSE HORIZONTALE

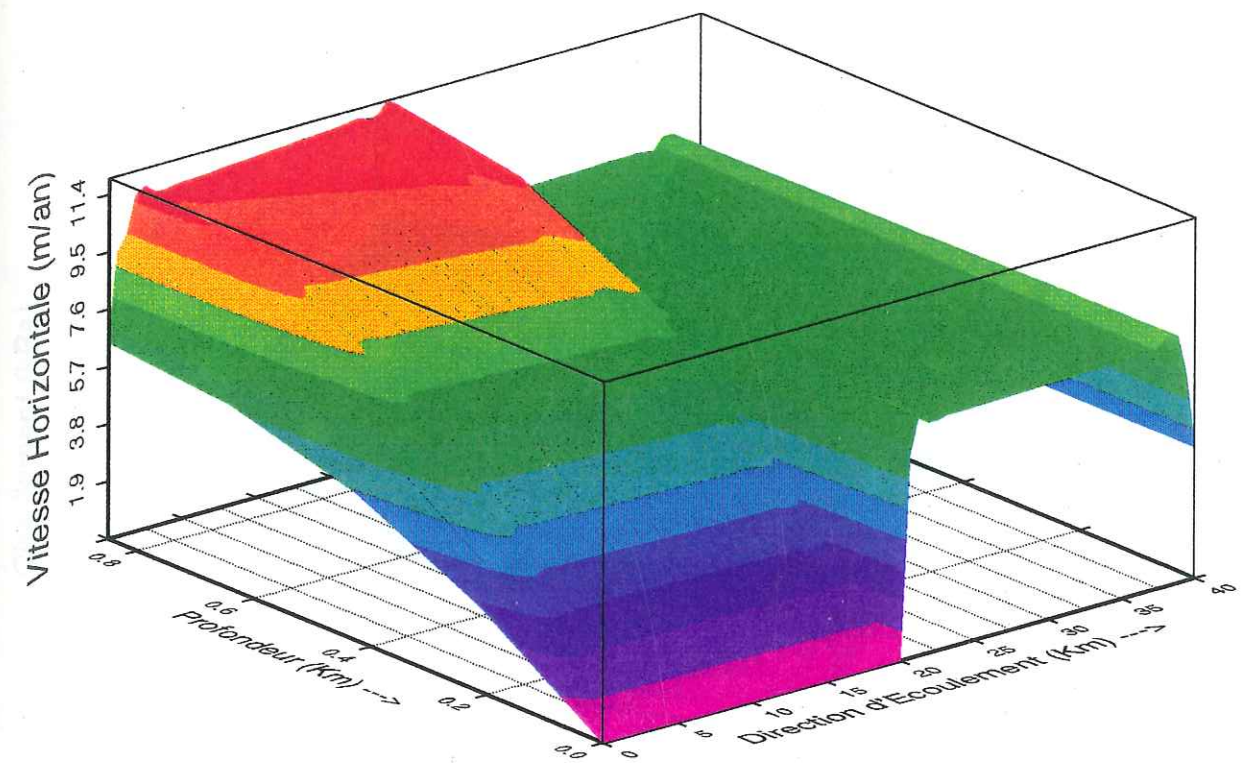


Fig. V.3 : Vitesse horizontale pour la transition avec conditions "naturelles".



## CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

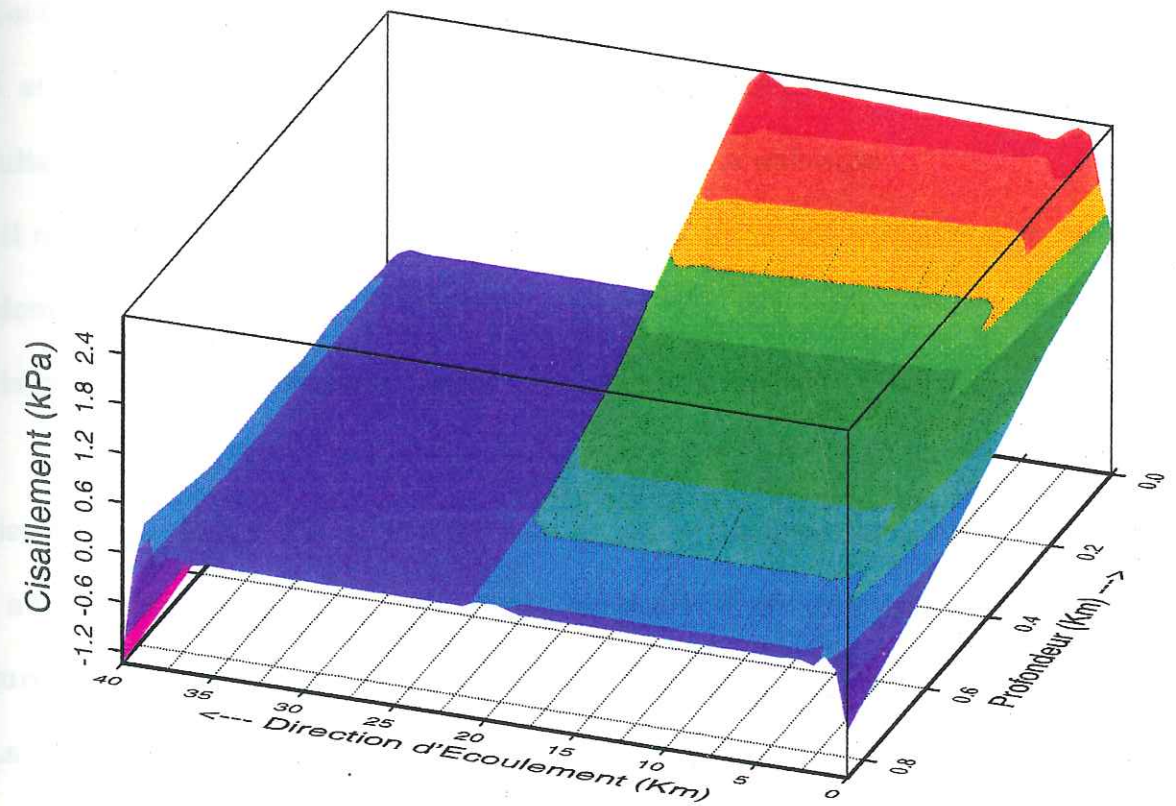


Fig. V.4 : Cisaillement pour la transition avec conditions "naturelles".



δ) solution avec les conditions mixtes

On a toujours  $W = 0$ . Dans le repère choisi la force horizontale est égale (selon l'amont ou l'aval) à :  $T_x = \pm (-P + 2\mu\partial U/\partial x)$  mais on a vu que la finitude du champ de vitesses à l'infini implique  $\partial U/\partial x = 0$ . On impose alors :

$$T_x(z) = \rho g (H_\infty - z) \cos\alpha$$

qui est l'expression de la pression due au poids de la colonne de glace. Les figures V.5 et V.6 donnent respectivement la vitesse horizontale et le cisaillement résultant de la simulation. On peut observer les faits suivants :

- 1) il n'existe plus de problème de raccord des solutions aux extrémités du domaine.
- 2) le cisaillement ne présente toujours pas de singularité non-bornée.

Le jeu de conditions aux limites étant celui attendu par le système, on peut donner les autres résultats obtenus : la vitesse verticale  $W$  (figure V.7), la pression  $P$  (figure V.8), et la surface libre à l'équilibre (figure V.9).

- La vitesse verticale est fortement négative dans la zone au-dessus du point de séparation  $O$ .
- La pression présente un profil linéaire en  $z$ .
- la surface libre d'équilibre présente un léger creusement au-dessus du point  $O$ .

A l'aide de la figure V.5, on peut observer que la vitesse horizontale de surface s'accroît un peu entre l'entrée et le point  $O$ , pour ensuite décroître. Ce comportement n'est pas en contradiction avec l'allure du profil de la surface libre.



## VITESSE HORIZONTALE

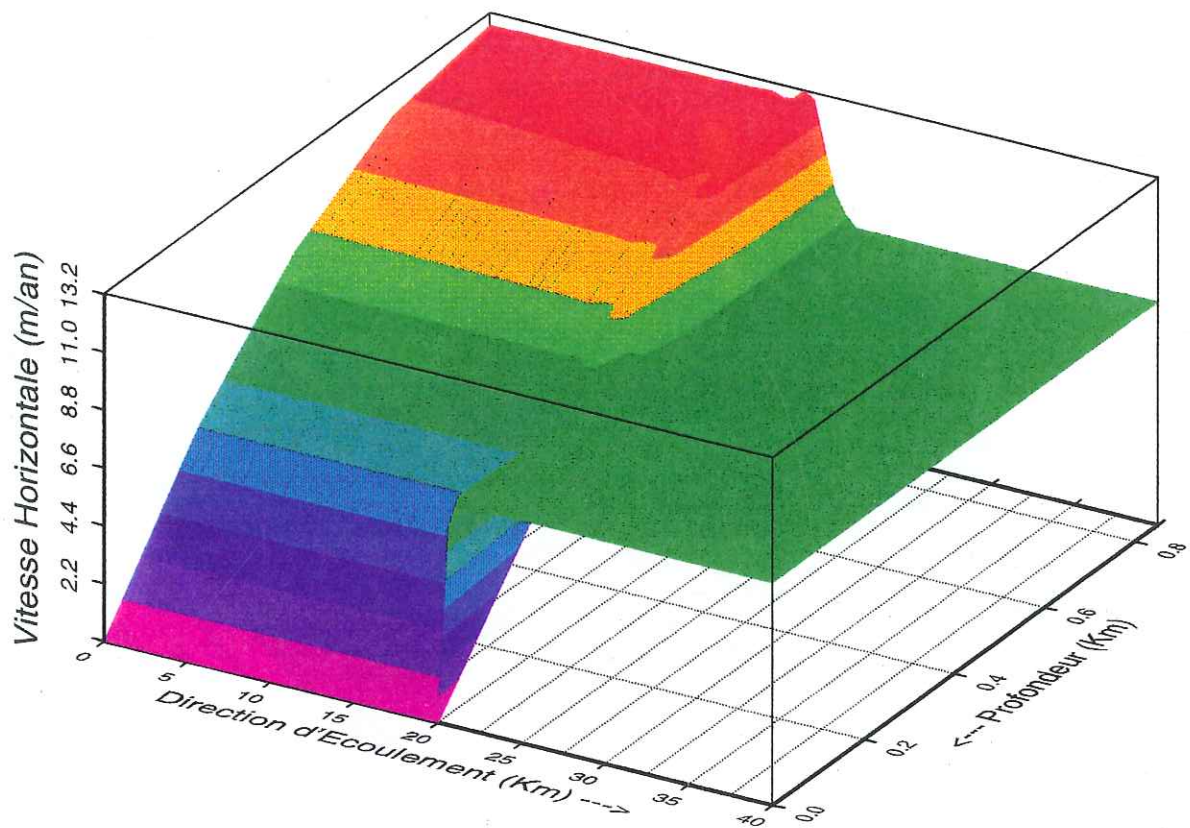


Fig. V.5 : Vitesse horizontale pour la transition avec conditions mixtes.



## CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

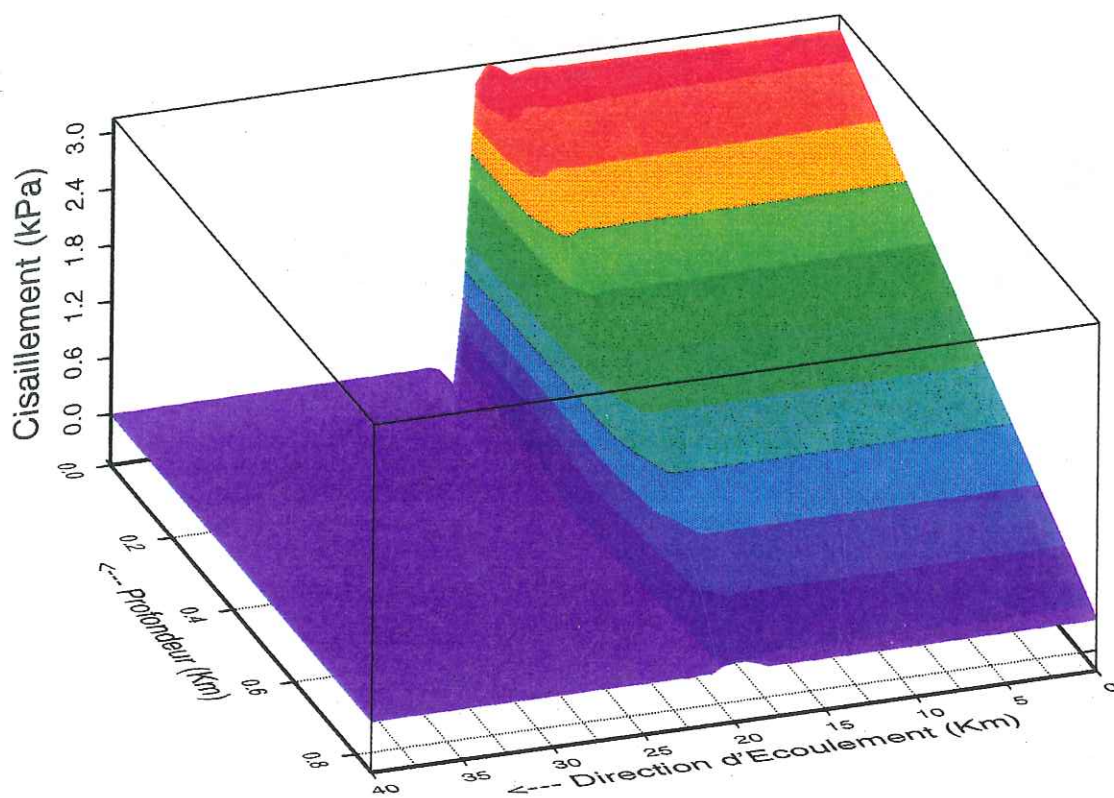


Fig. V.6 : Cisaillement pour la transition avec conditions mixtes.



## VITESSE VERTICALE

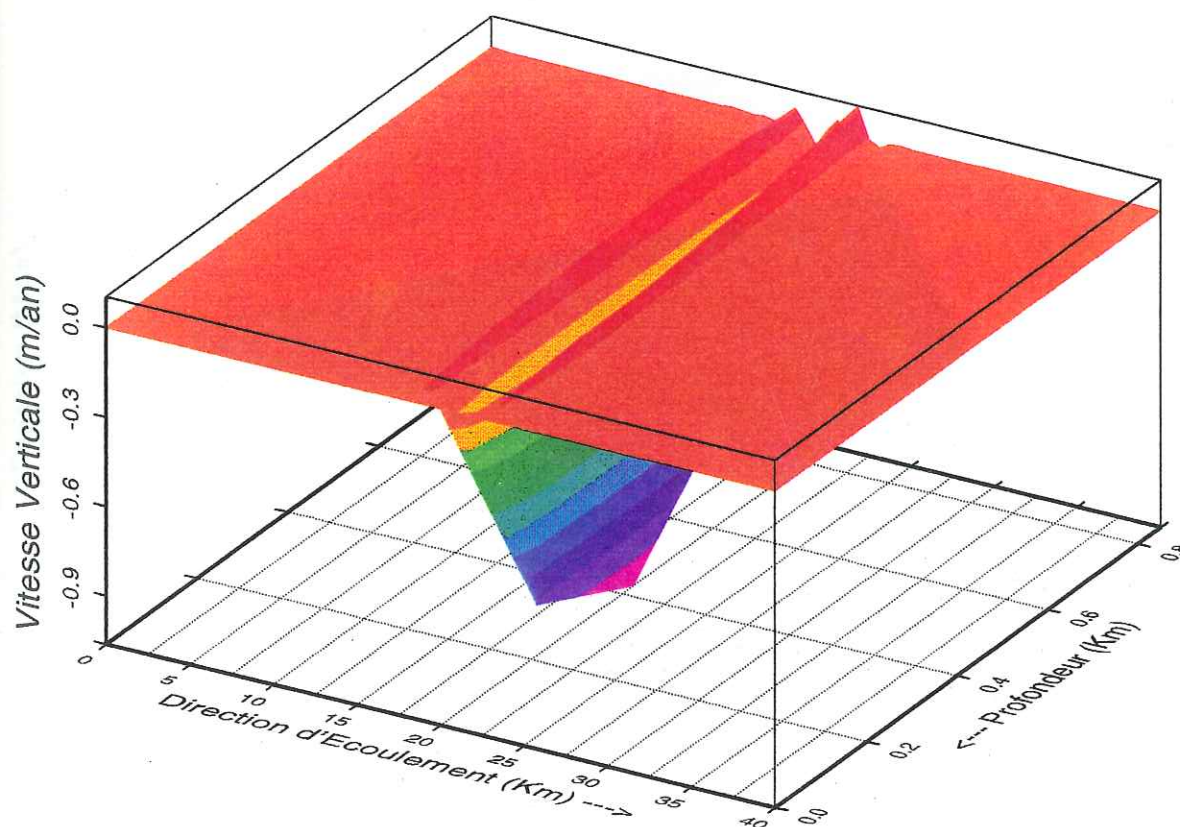


Fig. V.7 : Vitesse verticale pour la transition avec conditions mixtes.



# PRESSION

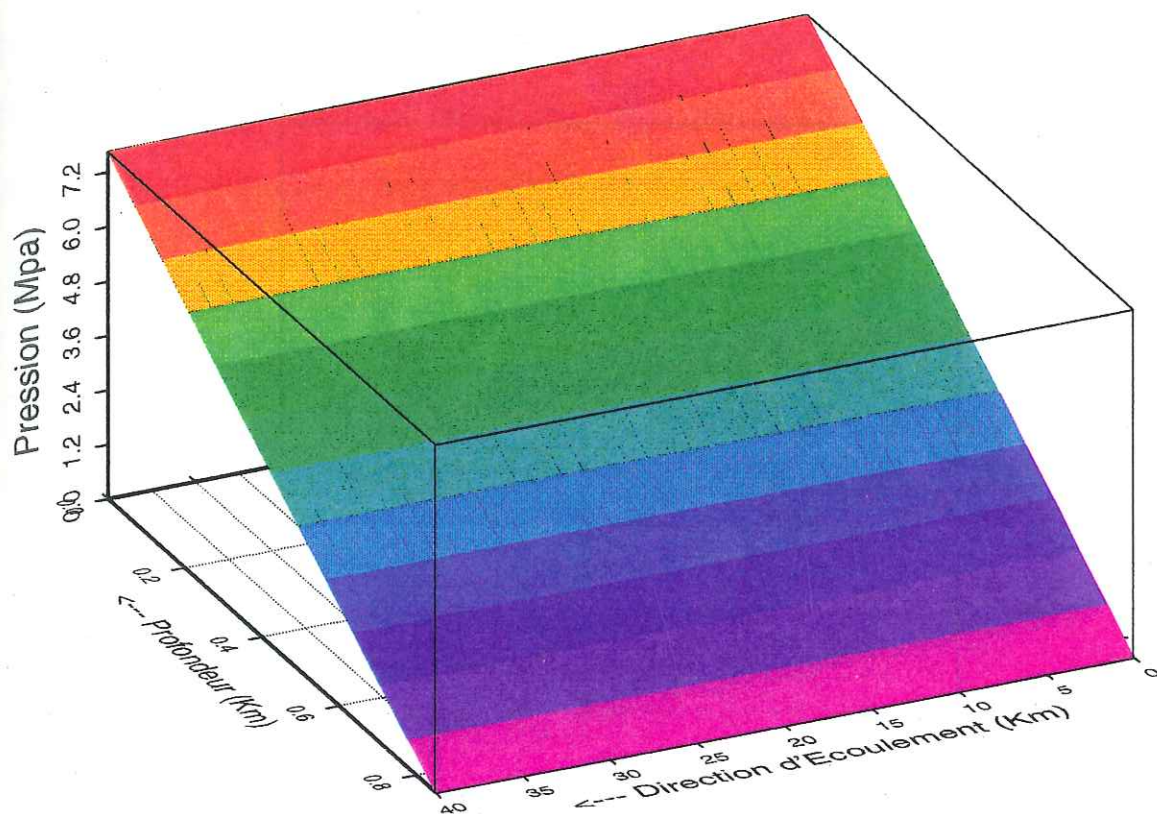


Fig. V.8 : Pression pour la transition avec conditions mixtes.



## SURFACE LIBRE

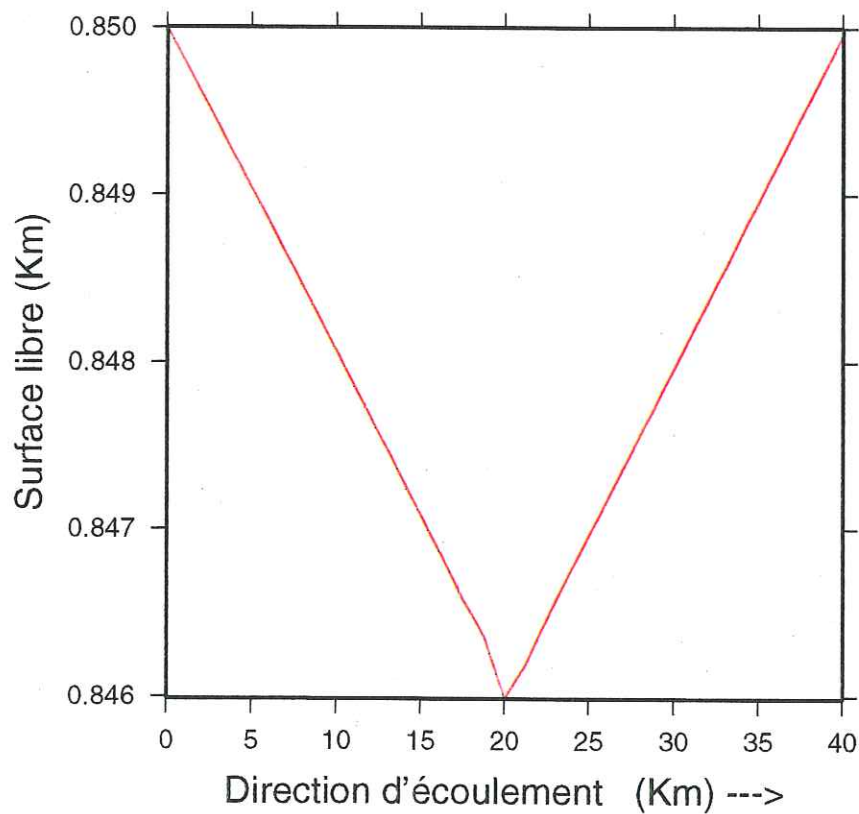


Fig. V.9 : Elévation de la surface libre pour la transition avec les conditions mixtes.



*e) comparaison entre les deux tests*

Si j'ai dénommé les solutions hors raccords "solutions libres", c'est parce que les conditions aux limites sont complètement inopérantes sur les solutions qui semblent les oublier purement et simplement. C'est pour cette raison que j'ai cherché un autre jeu de conditions aux limites qui puisse rendre compte des solutions libres. Je l'ai trouvé avec le choix des conditions mixtes. En effet, si l'on étudie d'un peu plus près le couple de résultats on s'aperçoit qu'outre la disparition du raccord, les résultats donnés par le second ensemble de conditions aux limites correspondent exactement aux solutions libres.

Pour moi ces résultats sont déjà suffisants en eux-mêmes, montrant ainsi que le choix des conditions aux limites mixtes est plus physique que le choix des conditions naturelles. Ceci permet d'exhiber un écoulement-solution cohérent ne correspondant pas à l'intuition. Il me semble que ce phénomène peut être expliqué par le raisonnement suivant :

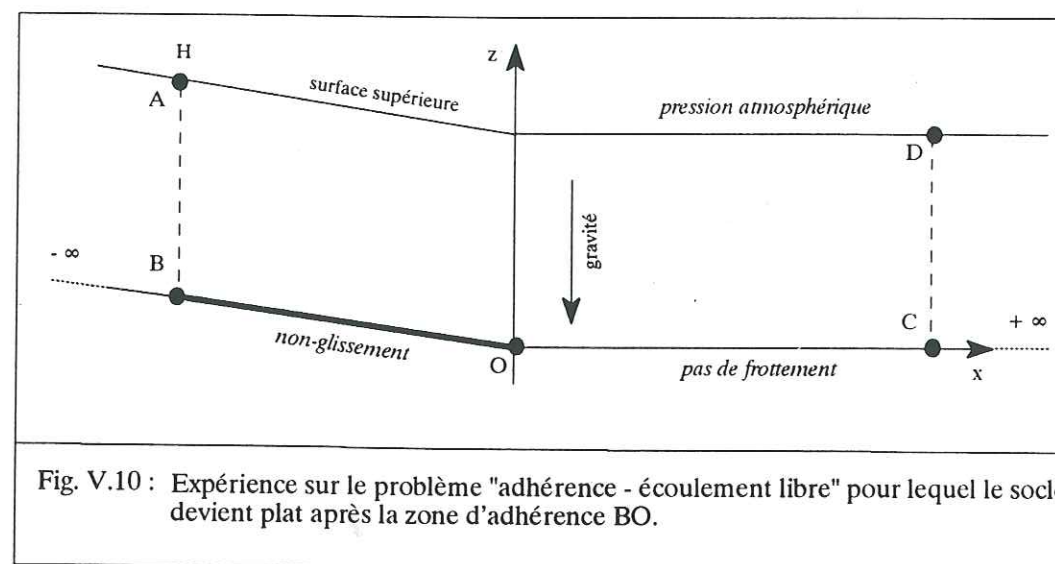
**"l'écoulement en aval du point de séparation est libre de toute contrainte extérieure qui, s'il n'y avait pas l'écoulement en amont, serait un mouvement de solide uniformément accéléré par la gravité terrestre. Mais il y a la partie amont avec adhérence qui joue le rôle d'un frein. Au total on obtient un écoulement accélérant d'un côté et un frein de l'autre. La résultante obéira bien entendu à un écoulement de type Poiseuille en amont et un écoulement libre en aval, mais l'équilibre -car il s'agit d'un équilibre- s'établit à un niveau différent de celui de l'écoulement de Poiseuille pur".**



Pour valider les résultats et le raisonnement précédents, j'ai effectué un autre test présenté dans le paragraphe suivant.

### ζ) test de validation

On reprend le test des conditions aux limites mixtes mais cette fois le socle devient plat après le point de séparation (voir figure V.10) :



Le but de ce test est de démontrer la justesse du raisonnement précédent. Dans la simulation décrite en δ) l'écoulement libre aval entraînait l'écoulement amont. Avec ce nouveau test l'écoulement aval n'étant plus accéléré par la gravité terrestre on devrait donc obtenir un équilibre neutre avec un écoulement limite en amont qui soit exactement celui de Poiseuille. Les résultats montrés figures V.11 et V.12 valident le raisonnement fait plus haut, car les valeurs maximales de la vitesse horizontale et du cisaillement en amont sont bien celles de l'écoulement de Poiseuille pur.

## VITESSE HORIZONTALE

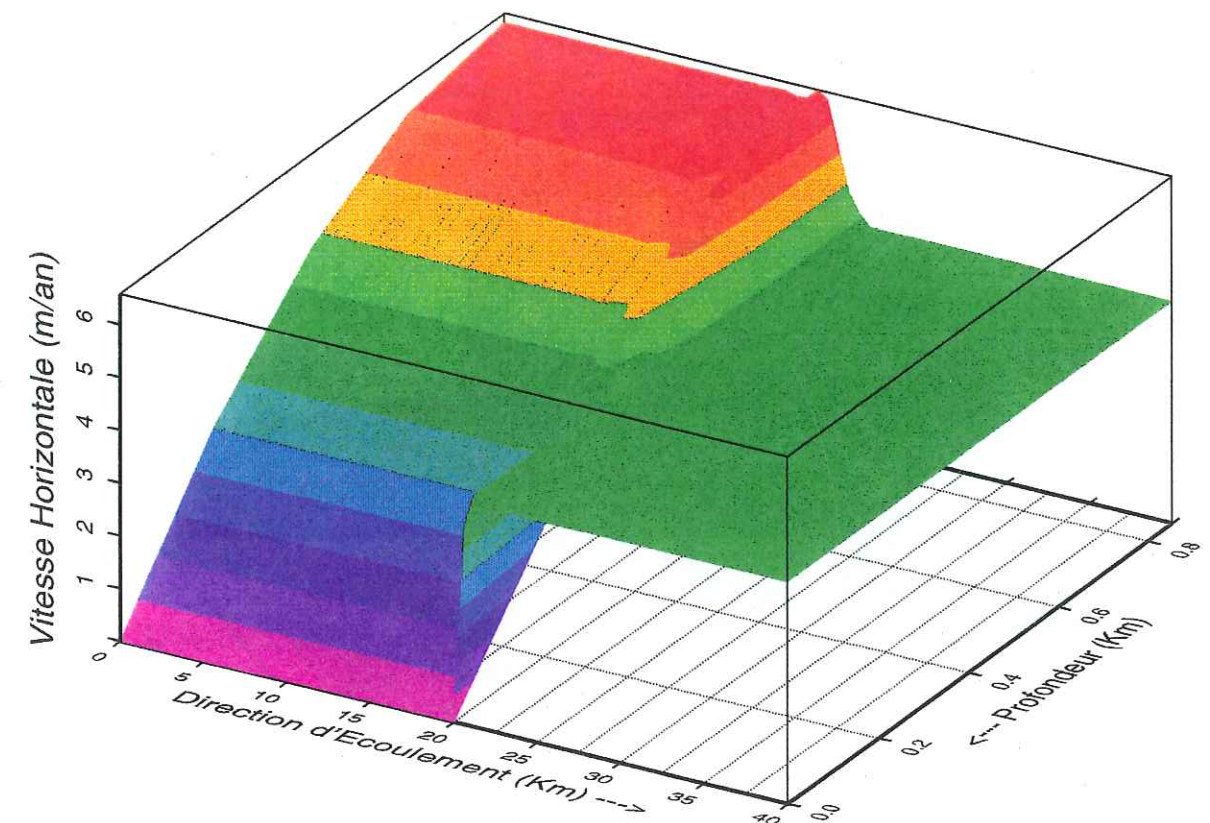


Fig. V.11 : Vitesse horizontale pour la transition avec socle plat en aval.



## CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

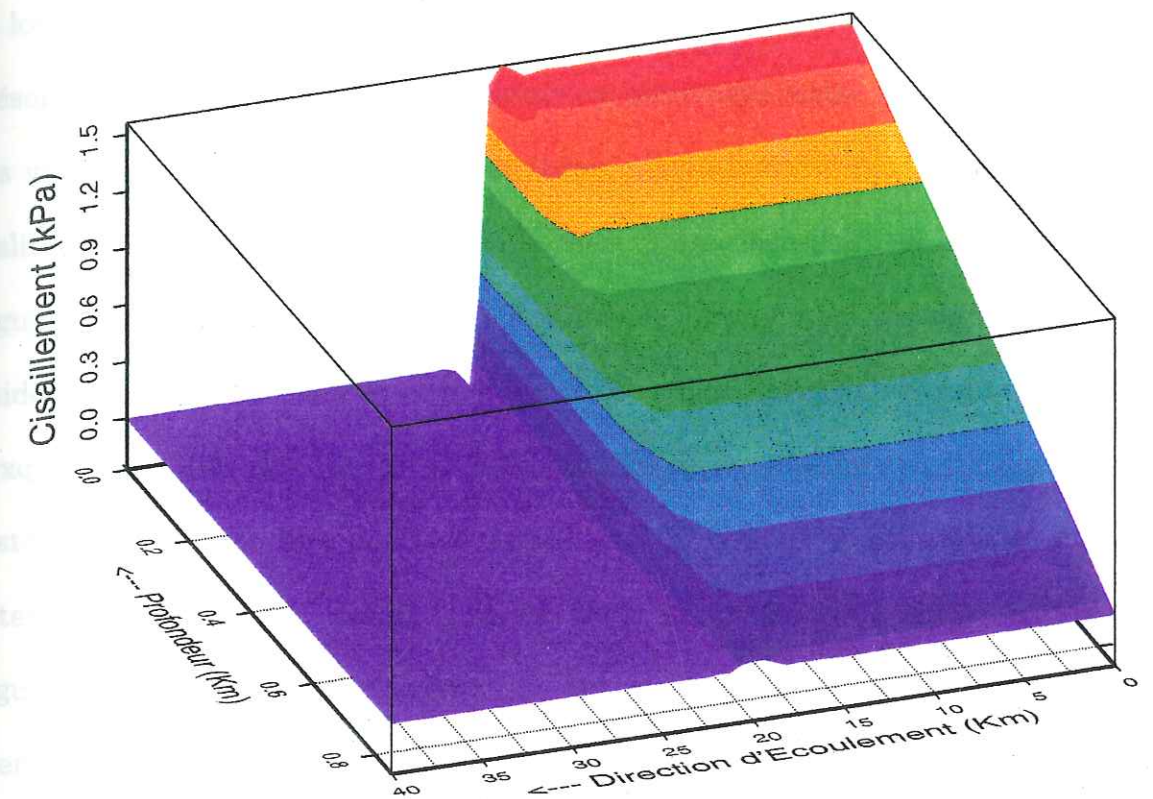


Fig. V.12 : Cisaillement pour la transition avec socle plat en aval.



### η) sur la régularité du cisaillement

Les tests précédents n'ont pu mettre en évidence une éventuelle singularité dans le cisaillement solution du problème, mais d'après les mathématiciens avec lesquels j'ai discuté on ne peut pas totalement écarter l'hypothèse que la méthode numérique soit aveugle. Néanmoins, l'utilisation permanente du programme tout au long de la thèse m'incitait plutôt à penser que si une singularité infinie était présente on devrait obtenir des gradients extrêmement forts. Néanmoins, ceci n'a pas valeur de démonstration et pour obtenir des résultats plus définitifs sur la réalité ou non d'une singularité non-bornée, il est nécessaire de recourir à une argumentation mathématique. Les équations de l'écoulement permanent de notre fluide sont régies par les équations de Stokes incompressibles et stationnaires auxquelles on doit rajouter un certain nombre de conditions aux limites. Un tel système d'équations aux dérivées partielles (EDP) peut être étudié de façon à déterminer l'existence et/ou l'unicité des solutions mais également leurs régularités. C'est ce dernier point qui doit nous donner l'information sur une éventuelle singularité. Les ouvrages classiques d'analyse mathématique des EDP (par exemple le Raviart et Thomas [36]) ne donnent des résultats sur l'existence et la régularité des solutions que dans les cas suivants : 1) le domaine fluide est un "patatoïde" à deux ou trois dimensions à frontière lisse et très régulière (c-a-d un ouvert borné à frontière au moins  $C^1$ ) , 2) les conditions aux limites sont soit de type Dirichlet (vitesses imposées sur toute la surface extérieure), soit de type Von Neumann (gradient normal de la vitesse imposé partout), soit encore un mélange des deux mais sur des portions distinctes et disjointes de la surface



extérieure. Je ne connaissais pas de résultats concernant des problèmes pour lesquels la force extérieure sur toute ou portion de la surface. Idem pour ce qui concerne le mélange de conditions aux limites de type vitesses et de type force imposés simultanément en des points de la surface. C'est pour cela que j'ai dû faire appel à des mathématiciens spécialistes des EDP et plus particulièrement sur les questions de problèmes elliptiques dans des domaines à frontière non lisses. C'est Monique Dauge de l'Université de Rennes qui m'a introduit aux problèmes soulevés -concernant la régularité des solutions- lorsque la frontière du domaine présente des angles (voire des points de rebroussement) et lorsque deux portions contiguës de cette frontière portent des jeux différents de conditions aux limites. C'est l'analyse de ces problèmes appliqué à notre écoulement qui est présentée dans le paragraphe suivant. La solution exposée est entièrement due à Monique Dauge.

d) Le cisaillement est-il borné ? :

Pour des raisons pratiques la solution du problème n'est pas cherchée en variables vitesse - pression mais avec la variable fonction de courant. L'analyse de la régularité des solutions -au voisinage d'un point où la frontière présente une perte de régularité (c-à-d un coin pouvant aller jusqu'à la fissure) avec généralement des types de conditions aux limites différents de part et d'autre de ce point- s'effectue en passant aux coordonnées polaires locales du coin  $(\rho, \theta)$ . Pour rendre les calculs plus faciles on utilise la coordonnée complexe associée :  $\zeta = x + iz$  où  $x$  et  $z$  sont les coordonnées cartésiennes et  $i^2 = -1$ .  $x$  et  $z$  sont reliés aux



coordonnées polaires par les formules classiques :  $x = \rho \cos \theta$  et  $z = \rho \sin \theta$ .

La <sup>2</sup>théorie des singularités permet de montrer que les solutions générales des équations de Stokes décrivant notre écoulement se décompose en deux parties, l'une régulière et l'autre singulière :  $\text{Sol} = \text{Sol}_{\text{reg}} + C \text{Sol}_{\text{sing}}$ . La solution singulière est calculée en résolvant les équations de Stokes dans lesquelles le terme des forces de volume est pris égal à zéro et avec les conditions aux limites suivantes :

- $U = W = 0$  sur la partie adhérente du socle
- $T_x = 0$  et  $W = 0$  sur la partie du socle sans adhérence

Les solutions singulières sont fonctions de l'angle au point O dont la valeur ici est  $\pi$ . La base théorique du calcul des solutions singulières est exposée dans [43].

Les solutions qui m'ont été fournies sont les suivantes :

$$\begin{cases} U_{\text{sing}} + i W_{\text{sing}} = 3 \bar{\zeta}^{1/2} + 2 \zeta^{1/2} - \zeta \bar{\zeta}^{-1/2} \\ U_{\text{sing}} - i W_{\text{sing}} = 3 \zeta^{1/2} + 2 \bar{\zeta}^{1/2} - \bar{\zeta} \zeta^{-1/2} \\ P_{\text{sing}} = -2 \mu (\zeta^{-1/2} + \bar{\zeta}^{-1/2}) \\ \Sigma_{\text{sing}} = \frac{i}{2} (3 \zeta^{-1/2} - 3 \bar{\zeta}^{-1/2} + \bar{\zeta} \zeta^{-3/2} - \zeta \bar{\zeta}^{-3/2}) \end{cases} \quad (\text{V.7})$$

Je reporte dans l'annexe A8 la transcription de ces solutions avec les coordonnées cartésiennes. Avant d'aller plus loin il faut préciser ce qui est entendu par "singularité" dans cette analyse. Cette notion n'est pas fixe car elle dépend de ce que l'on attend des solutions. Par exemple, on considérera les vitesses comme régulières si elles sont de classe  $C^1$  : leurs dérivées partielles existent et sont

<sup>2</sup> concernant tous ces problèmes on consultera les ouvrages de P. Grisvard [44] et M. Dauge [45] et divers travaux de M. Dauge [46,47,48].

continues. Si elle ne sont plus  $C^1$ , elles seront singulières parce qu'elles auront perdu de la régularité. Ce sens n'est généralement pas celui qui est utilisé en physique, lequel correspond plutôt à la notion de "borné ou non-borné".

On peut voir d'après les expressions des solutions singulières que  $U_{\text{sing}}$  et  $W_{\text{sing}}$  sont bornées en  $x = z = 0$ , alors que  $P_{\text{sing}}$  et  $\Sigma_{\text{sing}}$  ne le sont pas.

Les solutions générales de notre problème s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} U = U_{\text{reg}} + [F(\vec{f}) + G_1(g_1) + G_2(g_2)] U_{\text{sing}} \\ W = W_{\text{reg}} + [F(\vec{f}) + G_1(g_1) + G_2(g_2)] W_{\text{sing}} \\ \Sigma = \Sigma_{\text{reg}} + [F(\vec{f}) + G_1(g_1) + G_2(g_2)] \Sigma_{\text{sing}} \\ P = P_{\text{reg}} + [F(\vec{f}) + G_1(g_1) + G_2(g_2)] P_{\text{sing}} \end{cases} \quad (\text{V.8})$$

Le facteur  $C = (F + G_1 + G_2)$  est la somme de trois termes caractéristiques des forces volumiques  $\vec{f}$ , et des conditions aux limites  $g_1$  et  $g_2$  imposées sur les cotés AB et CD de la géométrie de référence. Leurs expressions sont données par les formules suivantes :

$$\begin{cases} F(\vec{f}) = \int_{\Omega} \langle \Xi, \vec{f} \rangle d\Omega \\ G_1(g_1) = \int_{[AB]} h_1(z) g_1(z) dz \\ G_2(g_2) = \int_{[CD]} h_2(z) g_2(z) dz \end{cases} \quad (\text{V.9})$$

Les fonction  $h_1, h_2$  et  $\Xi$  ne dépendent que de la géométrie du domaine et ne sont pas immédiates à calculer car elles nécessitent à leur tour la résolution d'un



problème de Stokes. Les équations (V.8) font donc apparaître que la singularité sera ou ne sera pas visible selon que  $(F + G_1 + G_2)$  est nul ou pas.

Passons maintenant à la question de savoir si la résolution numérique est capable de détecter la singularité si elle est effectivement présente dans la solution générale.

*α) détection de la singularité par le programme*

On teste le programme sur la solution singulière seule. Si les solutions numériques obtenues correspondent aux solutions données (eq. V.7) alors la méthode programmée est en mesure de détecter la singularité.

On résout les équations de Stokes dans lesquelles on a pris le second membre égal à zéro (ici, cela équivaut à prendre une densité nulle pour le fluide).

Les conditions aux limites sur le socle sont exactement les mêmes que celles du problème général :

- sur BO,  $U = W = 0$ .
- sur OC,  $T_x = 0$  et  $W = 0$ .

Les dimensions géométriques sont également identiques à celles du problème général : épaisseur 850 m, largeur 40 Km.

La viscosité  $\mu$  est prise égale à  $10^5$  Pa.an. On ne fait pas évoluer la surface libre.

On présente les résultats pour la vitesse horizontale (figure V.13), la vitesse verticale (figure V.14), la pression (figure V.15), et le cisaillement (figure V.16).

En Annexe A8, on donne les graphes obtenus à partir des expressions analytiques des solutions singulières ; on pourra s'y reporter pour comparer les solutions

numériques aux solutions théoriques. La comparaison permet de se rendre compte que les simulations numériques sur le problème singulier redonnent toutes les caractéristiques des solutions analytiques ; en particulier les singularités infinies sont bien détectées, mais avec des valeurs numériques plus faibles.

La singularité de la pression est très concentrée autour du point  $x = z = 0$ . Ce qui la rend très sensible à la densité du maillage. Le maillage utilisé pour obtenir les résultats précédents est fin. Afin de tester l'effet du maillage sur la pression, on présente la figure V.17 obtenue avec un maillage plus grossier. On constate que la pression singulière peut être facilement sous-estimée par un pur effet de maillage.



## VITESSE HORIZONTALE

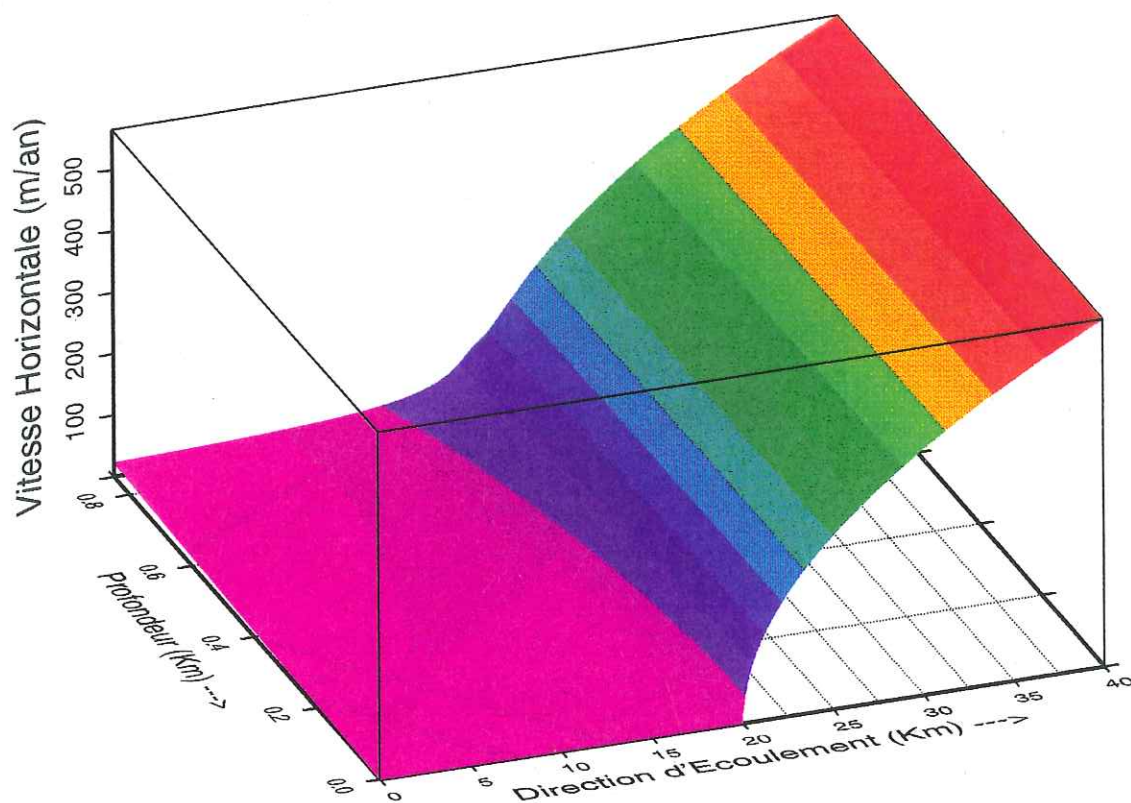


Fig. V.13 : Simulation de la vitesse horizontale singulière



## VITESSE VERTICALE

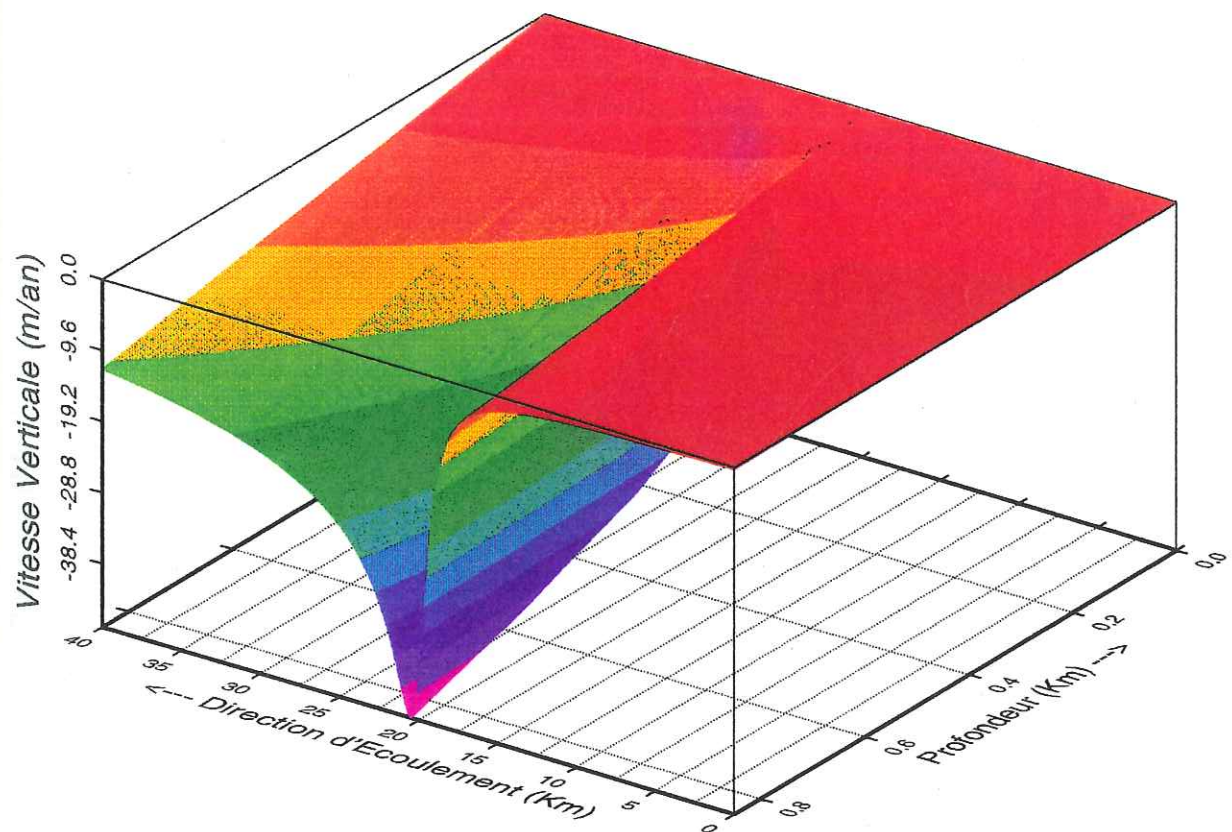


Fig. V.14 : Simulation de la vitesse verticale singulière



## PRESSION

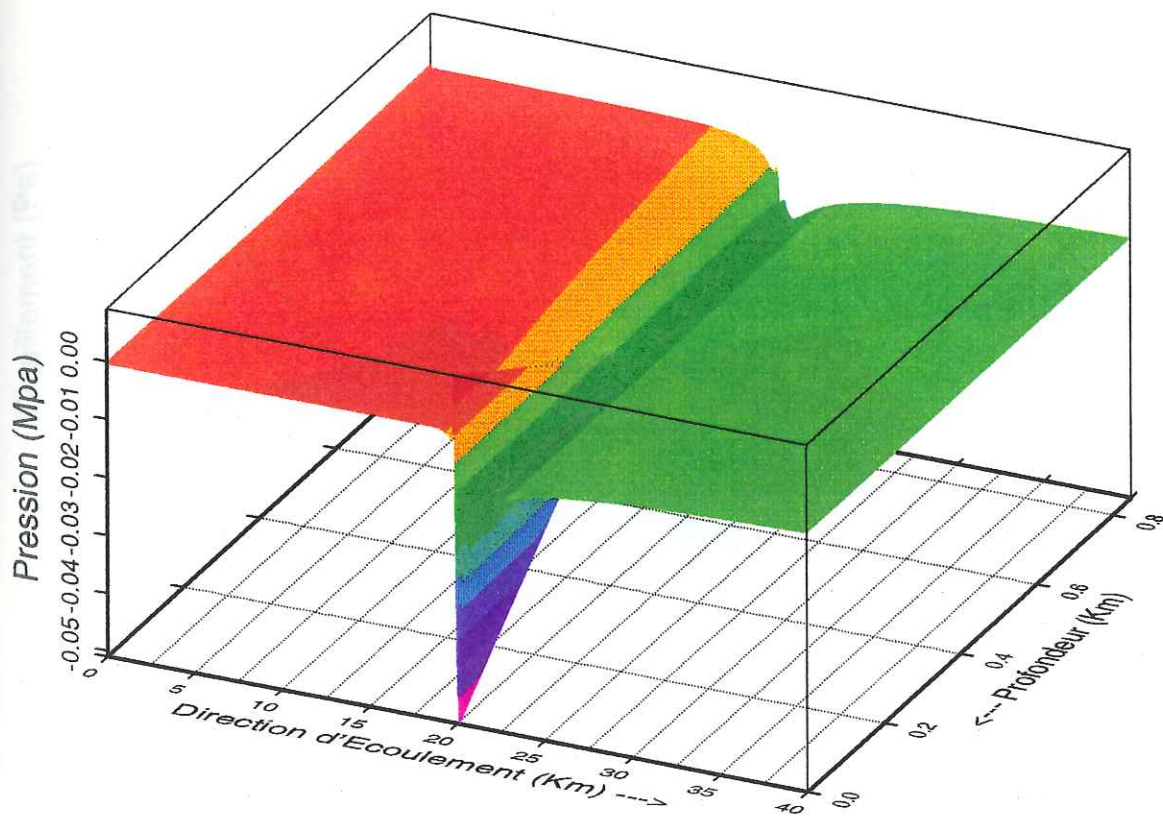


Fig. V.15 : Simulation de la pression singulière



## CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

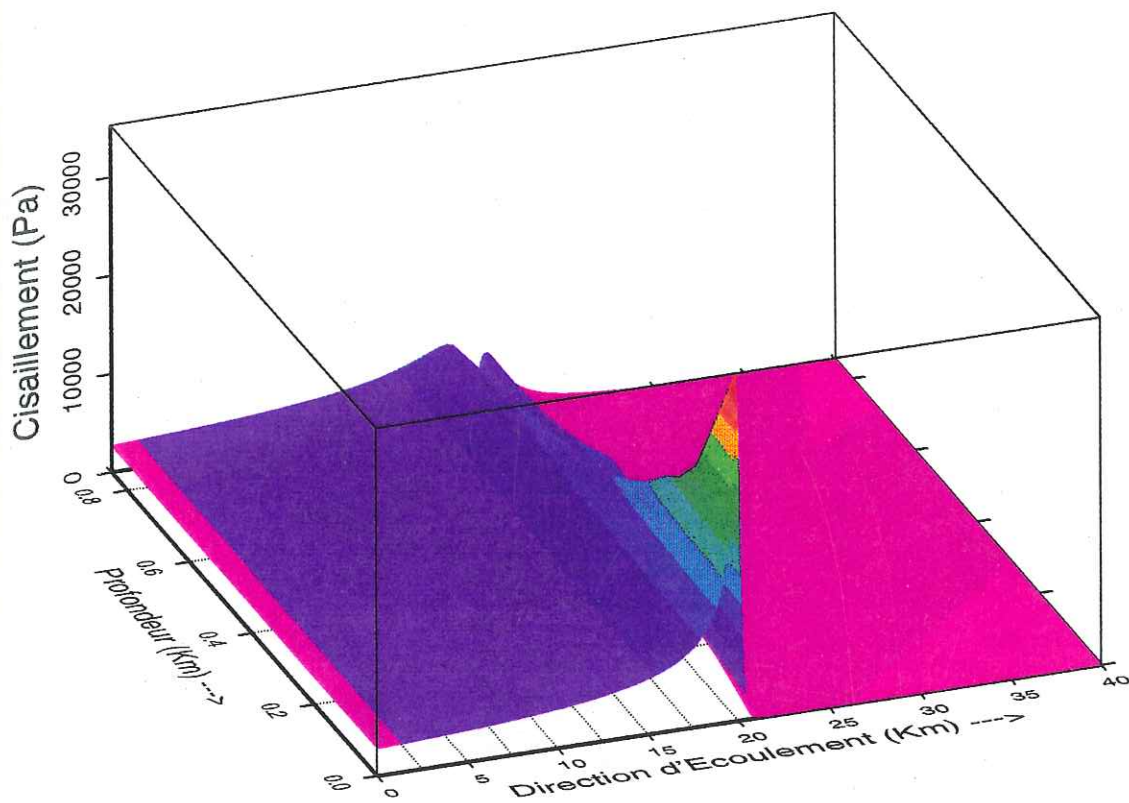


Fig. V.16 : Simulation du cisaillement singulier



## PRESSION

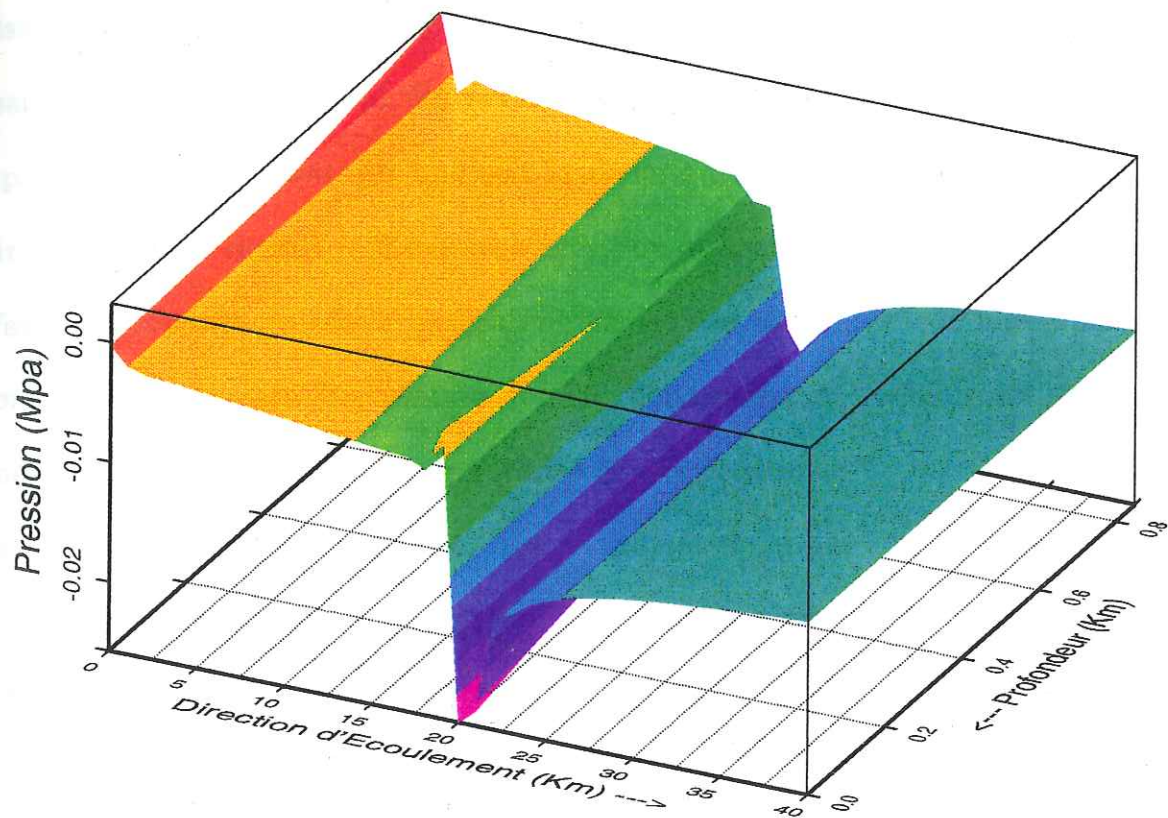


Fig. V.17 : Simulation de la pression singulière avec un maillage grossier



*β) élimination de la singularité par l'évolution de la surface libre*

On se rend facilement compte à l'aide de la figure V.13 que la vitesse présente une singularité étendue, dont la valeur en sortie du domaine d'étude n'est pas négligeable. Cette particularité la rend plus intéressante que la pression. On a vu que la perturbation apportée par la pression dépend beaucoup du maillage utilisé, et ainsi peut ne pas apparaître assez pour perturber suffisamment la pression du problème général. En revanche, la vitesse horizontale présente des comportements identiques quelque soit la densité du maillage. Or pour ne pas avoir des temps de calculs rédhibitoires lorsqu'on utilise l'évolution itérative de la surface libre dans le problème général, on utilise des maillages trop lâches pour la pression. La vitesse horizontale semble donc être un meilleur indicateur numérique de la présence de la singularité que la pression.

Afin de montrer, numériquement, que la partie singulière est éliminée par l'évolution de la surface libre, et en tenant compte des remarques ci-dessus, on va suivre la vitesse horizontale au cours des itérations. Comme ce serait redondant d'utiliser tout le champ de vitesse, on va s'intéresser uniquement à deux vitesses particulières : la vitesse se surface en entrée du domaine (figure V.18), et la vitesse en surface en sortie du domaine (figure V.19). Conjointement à ces deux résultats, on donne l'évolution d'un point significatif de la surface libre au cours de l'itération (figure V.20). Ce point est situé dans la zone entourant le point de séparation O, zone dans laquelle la surface subit la plus forte déflexion.

L'examen de ces trois dernières figures donne les deux point suivant :

- la vitesse de surface en sortie et le point de la surface libre atteignent très vite



un état proche de l'état d'équilibre.

- la vitesse de surface en entrée est plus lente à atteindre son état d'équilibre.

Remarque : il est primordial de pouvoir suivre le coefficient  $C$  de la composante singulière de la solution générale. Malheureusement, les résultats ci-dessus ne permettent pas d'atteindre une telle information car on a évolution simultanée du coefficient  $C$  et de la solution régulière puisque la géométrie évolue.

#### $\gamma$ ) conclusion

" La méthode numérique employée est capable de détecter la singularité non-bornée dans la pression, et la singularité de la vitesse horizontale. Par conséquent, si la solution numérique de la pression obtenue pour le problème "adhérence - écoulement libre" ne présente pas de singularité non-bornée alors cette singularité n'est pas présente dans toutes les autres solutions, en particulier la contrainte de cisaillement est bornée au point de séparation  $O$ ."

On met aussi en évidence que l'évolution de la surface libre résorbe la partie singulière de la solution générale. On disposera d'une preuve plus radicale lorsqu'on pourra calculer le coefficient de la singularité et le suivre tout au long du processus itératif.

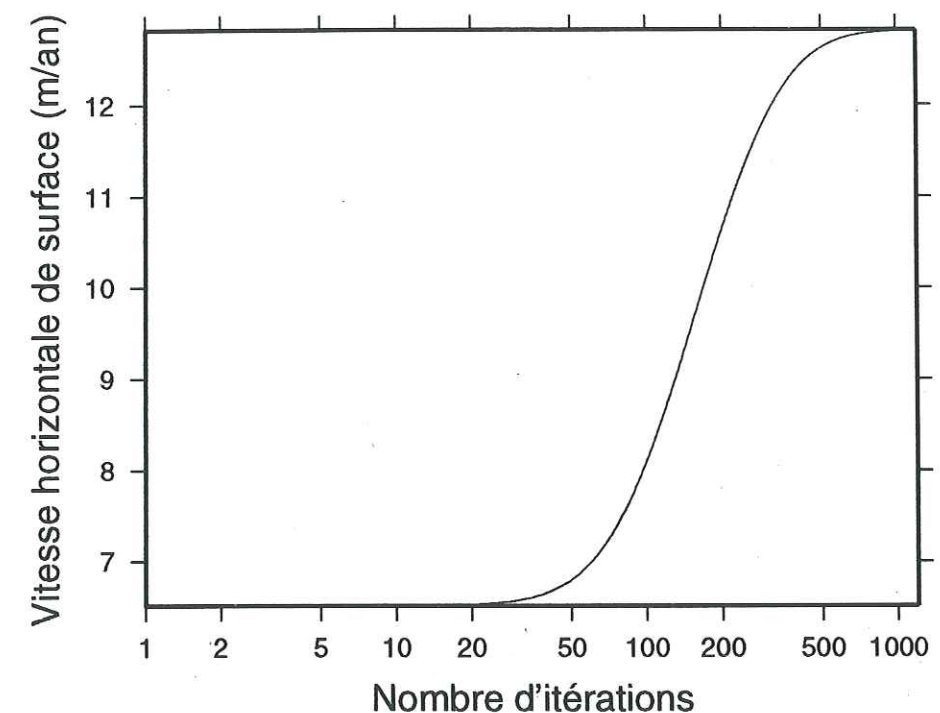


Fig. V.18 : Evolution de la vitesse horizontale de surface à l'entrée du domaine au cours du processus itératif



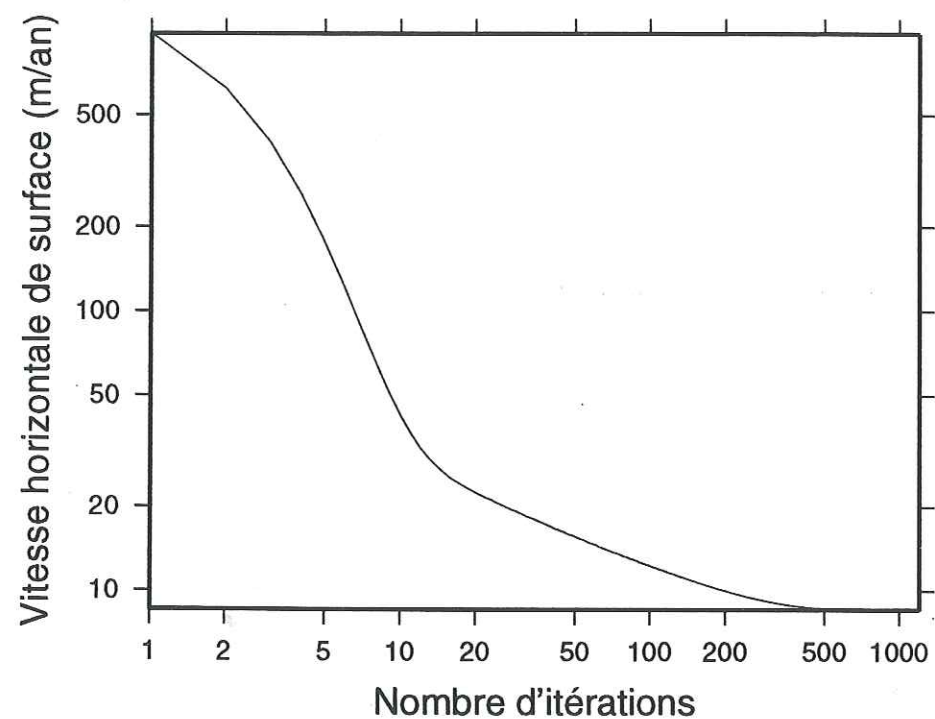


Fig. V.19 : Evolution de la vitesse horizontale de surface à la sortie du domaine au cours du processus itératif

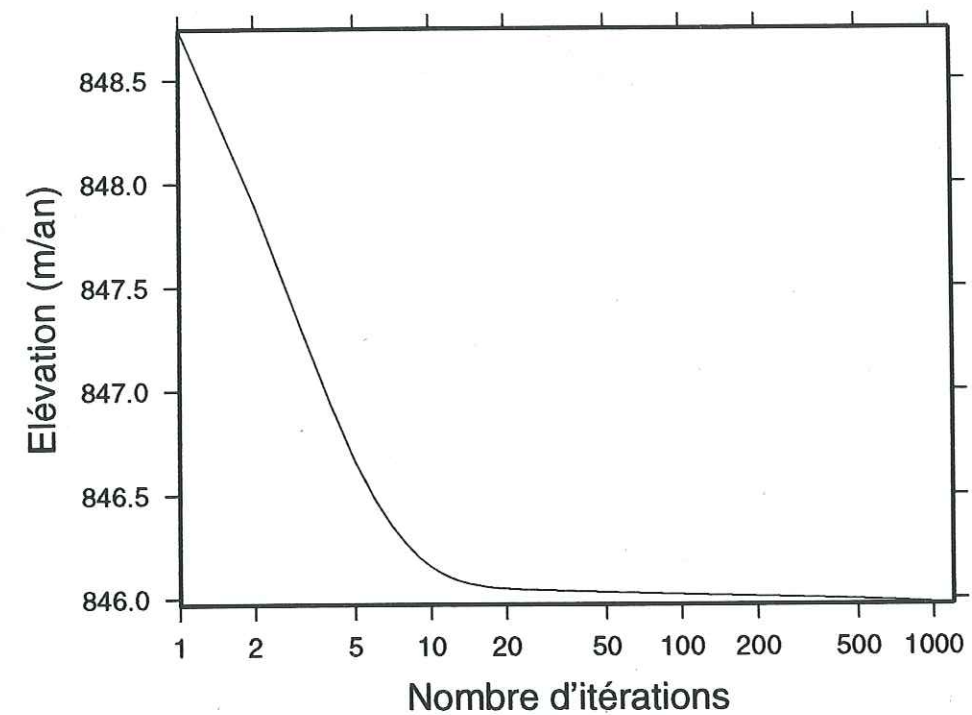


Fig. V.20 : Evolution d'un point de la surface dans la zone de plus grande déflexion au cours du processus itératif



e) Conclusion générale de l'étude

Il ressort des résultats obtenus dans ce chapitre que le problème "adhérence - écoulement libre" est caractérisé par les propriétés suivantes :

- l'écoulement possède deux régimes distincts : un écoulement amont de type Poiseuille et un écoulement dit de la "chasse d'eau".
- l'écoulement de type Poiseuille en amont s'établit à des valeurs de vitesse et de cisaillement supérieures à celles résultant du problème de Poiseuille pur pour les mêmes données géométriques et physiques.
- l'analyse mathématique du problème met en évidence l'existence d'une singularité dans la solution générale. Néanmoins, l'évolution de la surface libre élimine cette singularité, rendant ainsi le problème physique régulier.
- Les solutions sont régulières ; en particulier le cisaillement et la pression sont bornées dans tout le domaine.

## VI

## LA TRANSITION "CALOTTE - ICE SHELF"

### A DEUX DIMENSIONS



## LA TRANSITION CALOTTE - ICE SHELF A DEUX DIMENSIONS

### a) Introduction

Le chapitre précédent nous a montré quelles étaient les caractéristiques de l'écoulement d'une nappe uniforme d'un fluide homogène et de viscosité constante dans le problème idéalisé de la transition "adhérence - écoulement libre". La transition calotte - ice shelf n'en est qu'un cas particulier. On doit donc s'attendre à des résultats très similaires. En effet, une telle transition traduit le passage d'un écoulement de glace de l'intérieur des terres vers l'océan : d'ancrée, la glace devient flottante en raison de la poussée d'Archimède. La configuration géométrique de l'écoulement est donc similaire au cas V-c-ε).

Venons en maintenant à la description schématique d'une zone de transition. Tout de suite il doit être clair qu'une zone de transition "géophysique" n'est pas le propos de cette étude. Le but n'est pas de reconstituer exactement l'écoulement de quelques  $\text{Km}^3$  de glace quelque part sur une calotte actuelle, mais plutôt de déterminer ce qui peut être commun à toutes les zones de transition puisqu'elles reflètent un même type de phénomène afin de fournir les éléments "théoriques" nécessaires à une modélisation des zones de transition au sein des modèles globaux de reconstruction de calottes polaires. C'est pour cela que n'ont été conservé que les caractéristiques physiques les plus cruciales : type de géométrie et non-linéarité de la glace.



b) la zone de transition idéalisée

Dans un premier temps examinons la figure VI.1 ci-dessous définissant les caractéristiques de la schématisation utilisée :

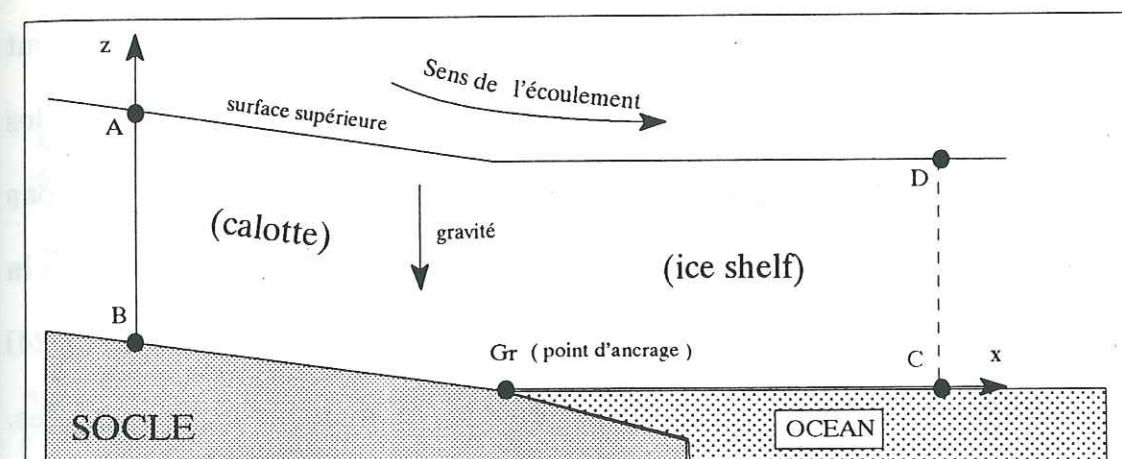


Fig. VI.1 : Caractéristiques essentielles de la schématisation adoptée pour décrire la zone de transition entre une calotte et un ice shelf.

Rappelons que dans notre modélisation de la zone de transition l'écoulement est uniquement considéré dans un plan vertical car on suppose que les bords latéraux sont suffisamment loin pour ne plus avoir d'effet. La géométrie est extrêmement simple : en amont, la glace coule sur un socle uniforme, lisse et indéformable, puis elle se met à flotter sur un océan dont la seule caractéristique qui nous importe est qu'il le siège de la poussée d'Archimède. Cette géométrie n'est pas fixe et pourra évoluer pour s'adapter du mieux possible aux champs de vitesses. Ici (figure VI.1), seule la configuration de départ est présentée. Les surfaces libres sont la surface supérieure AD et la surface en contact avec l'océan  $G_1C$ . Leurs



évolutions nécessitent que les point A et  $G_r$  soient fixes. La pente du socle sera toujours faible, de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-3}$ . D'un point de vue physique la glace est caractérisée par : une densité et une température constantes, une rhéologie non-linéaire mais isotrope (pas de phénomène de texture), aucun phénomène d'accumulation - ablation n'intervient et la continuité de la glace est partout assurée (pas de crevasses). Pour sa dynamique l'écoulement est régi par les équations de Stokes à deux dimensions, auxquelles on adjoint les équations d'évolution des surfaces libres. Celles-ci comprennent la surface supérieure et la surface flottante. La loi de viscosité est donnée par une loi empirique [23,24] construite à partir d'une interpolation non-linéaire de données expérimentales. Elle tire sa caractéristique de ne pas être une loi puissance comme la loi de Glen, mais aussi de ne pas présenter de singularité infinie lorsque les taux de déformations sont nuls.

Deux types de simulations ont été effectuée. Tout d'abord on suppose que la glace adhère au socle ce qui signifie que les vitesses horizontales et verticales sont nulles. Puis un glissement a été introduit par le biais de forces surfaciques basales afin de tester les changements pouvant apparaître dans les solutions.

### a) simulation avec condition d'adhérence sur le socle

On se place donc dans le cas où la vitesse basale de la glace est nulle. Sur la figure VI.2 ont été indiquées toutes les conditions aux limites imposées à l'écoulement.

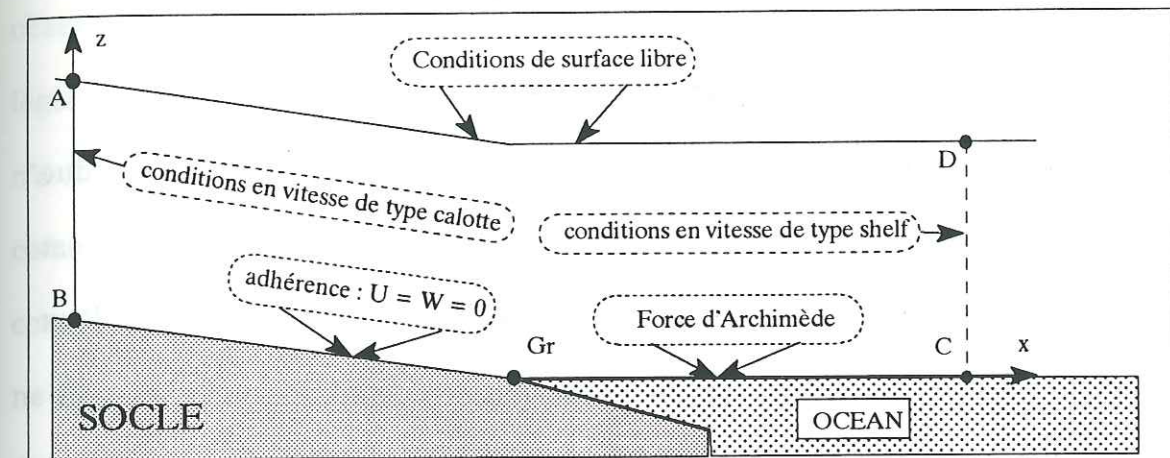


Fig. VI.2 : Conditions aux limites de la zone de transition dans les simulations où on considère qu'il y a adhérence de la glace sur le socle.

Sur les sections d'entrée et de sortie ce sont les profils des champs de vitesse qui ont été imposés. Pour l'entrée on utilise le profil provenant de la solution de l'écoulement de Poiseuille puisqu'on suppose implicitement que suffisamment loin du point d'ancrage l'effet de la transition n'existe plus (la forme analytique de ce profil est donné dans l'annexe A5) :

$$U(z) = \rho g \sin \alpha [H_{\infty}^2 - (h_{\infty} - z)^2] \quad \text{et} \quad W = 0$$

$h_{\infty}$  et  $H_{\infty}$  sont, respectivement l'altitude et l'épaisseur quand on se place loin en amont du point de séparation  $G_r$ . En sortie, compte tenu qu'il n'y a pas de



processus d'accumulation - ablation, la vitesse horizontale est déterminée en utilisant la condition de conservation de la masse (II.2). Cette détermination est possible car la vitesse est indépendante de la coordonnée verticale : il ne peut y avoir de gradient vertical puisqu'il n'y a rien pour induire un différentiel de vitesse (pas de frottement ni en surface supérieure ni au contact de l'eau). On obtient alors les conditions aux limites suivantes :

$$U = \text{constante} \quad \text{et} \quad W = 0$$

La surface supérieure est libre de tout contact ce qui implique que la pression due à l'atmosphère est la seule force surfacique extérieure. Cette pression est complètement négligeable et est prise égale à zéro. En notant  $F_x$  et  $F_z$  les deux composantes de la densité surfacique de force, on a :

$$F_x = F_z = 0$$

La surface flottante est quant à elle la surface de contact entre l'océan et la glace. En dehors de toute interaction thermodynamique, le seul rôle de l'océan est d'imposer à la glace la poussée d'Archimède. L'expression de cette condition aux limites est :

$$F_x = -P_a n_x \quad F_z = -P_a n_z$$

où  $P_a$  est la pression de l'eau au point considéré de la surface.

Venons en maintenant à ce qui est, je pense, l'un des points importants de cette étude. Il semblerait naturel de lier les deux surfaces libres par la relation d'équilibre hydrostatique. J'ai signalé dans le chapitre III sur la présentation des travaux de K. Herterich que la vitesse verticale posait beaucoup de problèmes (valeurs très élevées comparé à celles de la vitesse horizontale). Pendant très

longtemps j'ai eu les mêmes et ce quelque soit la valeur de la pente de surface que j'utilisais. Ces contre-performances ne m'avaient pas incité à introduire dans le programme une subroutine d'évolution des surfaces libres. La nécessité est devenue évidente le jour où A. Bombosch (communication personnelle) m'a fait part d'observations de certaines personnes de son laboratoire selon lesquelles on observerait des crevasses de surfaces au-dessus des lignes d'ancrage liées à un léger, mais suffisant, surcreusement de la surface supérieure. Cette caractéristique n'a fait pas l'objet d'aucune publications car sans doute est-elle trop anodine et comme tant d'autres détails appartient plus aux souvenirs personnels. La conséquence de cette observation est fondamentale : à la sortie du socle l'ice shelf ne respecte pas l'équilibre hydrostatique. Il a donc suffi d'introduire l'évolution des surfaces libres en les découplant pour voir disparaître la quasi totalité des problèmes concernant la vitesse verticale.

De très nombreuses simulations ont été effectuées. En particulier on a modifié la pente du socle, l'épaisseur de glace en entrée, la longueur de la zone et la densité du maillage d'éléments finis. Seuls la longueur de la zone et la densité du maillage auraient pu influencé sensiblement les résultats. La longueur a été prise de 10 à 40 Km. Quant à la densité du maillage elle a été testée en passant d'un facteur 1 à un facteur 10 : en pratique la dimension horizontale des éléments a atteint 25 m, soit un noeud tous les 12,5m !! Pour finir, il ressort que les caractéristiques de l'écoulement ne dépendent pas de ces paramètres car la qualité des résultats n'a jamais été perdue. C'est pourquoi les résultats sont présentés dans une seule configuration de géométrie et de maillage. On reporte dans l'annexe A9 un exposé



de la sensibilité des solutions à la densité du maillage. Ci-dessous sont données les valeurs numériques des paramètres utilisés :

*Valeur des différents paramètres utilisés lors de cette étude :*

densité de la glace :  $917 \text{ Kg/m}^3$   
densité de l'océan :  $1000 \text{ Kg/m}^3$

épaisseur moyenne : 850 m  
longueur : 40 Km

un noeud tous les 200 m environ dans la dimension verticale.  
un noeud tous les 625 m environ dans la dimension horizontale.

Les résultats vont être présentés sous la forme de remarques dont le but est d'indiquer les points les plus instructifs.

#### # vitesse horizontale (fig. VI.3)

La vitesse horizontale  $U$  présente deux régimes très tranchés. En amont du point d'ancrage il existe un différentiel de vitesse dû à la condition d'adhérence reflet d'un frottement très fort : on obtient le "régime calotte". En aval, la vitesse est indépendante de la profondeur et est ainsi conforme à ce que l'on attend dans un ice shelf : on obtient le "régime ice shelf".

On devra noter que le champ calculé ne présente aucun problème au bord du domaine montrant ainsi que les conditions aux limites imposées sont bien celles correspondant à la solution.

En surface la vitesse change graduellement du régime calotte au régime shelf.

La transition entre les deux régimes s'effectue sur une très courte distance de

2 à 4 Km. Très récemment une étude (présentée à VISAG, Cambridge 1993 et sûrement à paraître dans *Annals of Glaciology* 20) a donné des résultats de vitesse de surface par imagerie satellitaire en utilisant les déphasages entre deux images.

Il semble que là aussi la transition soit très marquée.

#### # vitesse verticale (fig. VI.4)

La vitesse verticale  $W$  présente un comportement plutôt singulier au-dessus du point d'ancrage. La valeur absolue maximale de  $W$  vaut à peu près 20% de la valeur de  $U$  dans cette zone : c'est beaucoup !! Je pense que le module d'évolution des surfaces libres n'est pas parfait. Comme je l'ai signalé lors de commentaires sur l'étude de K. Herterich [3] (ch. III) la vitesse verticale est excessivement sensible à l'adéquation de la géométrie. Il suffit alors d'un très subtil changement dans la géométrie pour modifier profondément  $W$  : l'examen des figures VI.7 et VI.8 doivent permettre de s'en rendre compte.

Comme pour la vitesse horizontale, il y a accord entre les conditions aux limites et la solution.

#### # pression (fig. VI.5)

On peut voir sans difficulté que le champ de pression  $P$  est linéaire dans la coordonnée verticale. Les résultats chiffrés permettent de se rendre compte que le gradient vertical de pression est égal à  $\rho g$  avec une bonne précision.

On devra remarquer que la pression est parfaitement définie et ne présente pas de singularité non-bornée.

#### # contrainte de cisaillement (fig. VI.6)

Comme pour la vitesse horizontale  $U$ , on voit apparaître deux régimes



d'écoulement particulièrement bien marqués. Dans la zone ancrée le cisaillement varie linéairement suivant  $z$  ce qui correspond à ce qui est attendu pour une calotte. Dans la zone flottante il devient très faible. La transition entre ces deux régimes est abrupte.

On devra faire plus particulièrement attention au comportement du cisaillement basal au passage du point d'ancrage car il n'apparaît aucune singularité non-bornée. Ceci est à mettre en lien avec les résultats du paragraphe V-d) concernant la détection par le programme d'une singularité non-bornée de la pression calculée.

# surfaces libres (fig. VI.7 , VI.8 , VI.9)

On présente les profils d'équilibre de la surface supérieure (fig. VI.7) et de la surface flottante en contact avec l'océan (fig. VI.8), et une comparaison entre les rapports "altitude - profondeur" calculé et théorique (fig. VI.9). Le rapport théorique est défini par le rapport :

$$(\text{densité de l'eau} - \text{densité de la glace}) / \text{densité de la glace}$$

Avec les deux premières figures, il est aisé de se rendre compte que l'ice shelf s'enfonce très légèrement. La figure VI.9 permet en plus de dire que l'ice shelf -à partir du point d'ancrage- viole l'équilibre hydrostatique. Le phénomène est a priori surprenant, mais il est corroboré par des études portant sur la flexion d'un ice shelf sous un forçage de la marée [49,50], par des constatations de terrain au sujet de crevasses en surface (A. Bombosch, communication personnelle), mais aussi par des résultats d'imagerie satellitaire (D. Vaughan [51]) mettant en évidence un creusement de la surface supérieure au-dessus de la zone d'ancrage.

L'amplitude de cet effet dans cette étude est particulièrement faible. Cette

faiblesse pourrait être due à la très faible pente du socle ayant été utilisée (D. Vaughan, communication personnelle).



## VITESSE HORIZONTALE

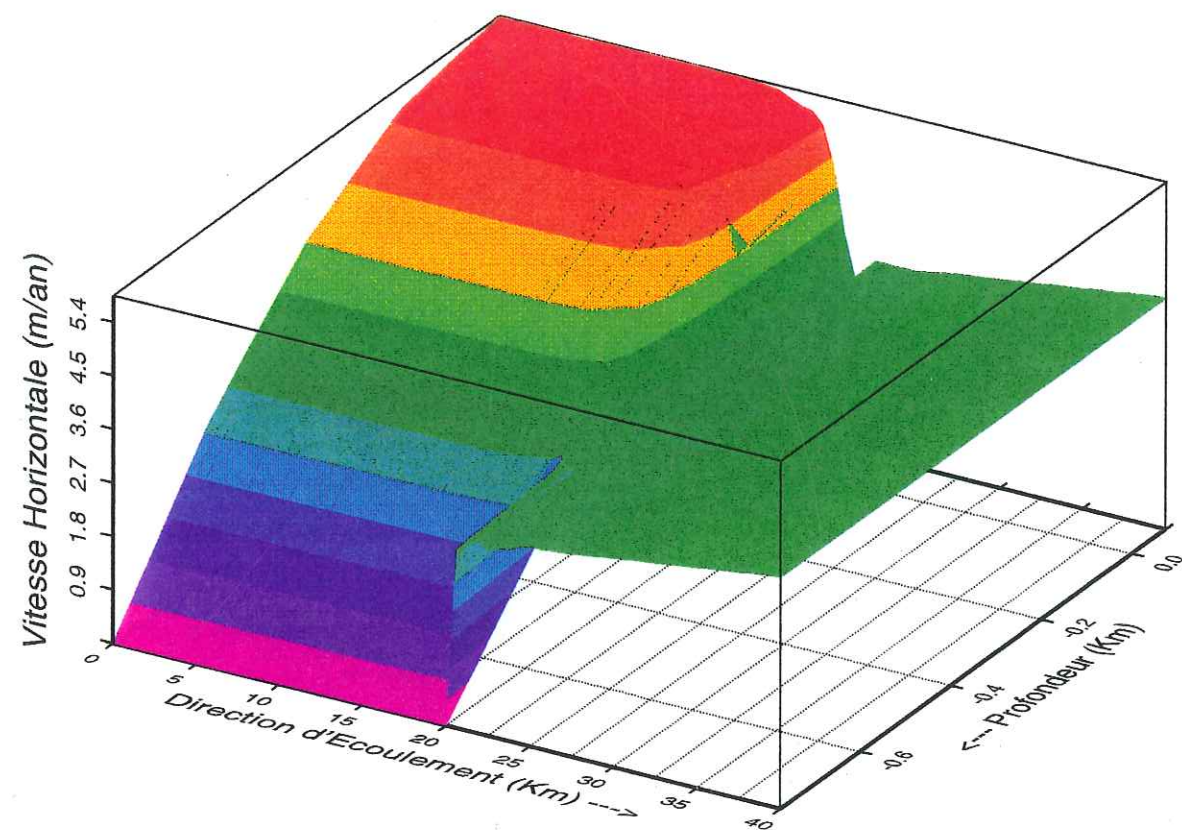


Fig. VI.3 : Vitesse horizontale pour la transition calotte - ice shelf avec condition d'adhérence au socle.



## VITESSE VERTICALE

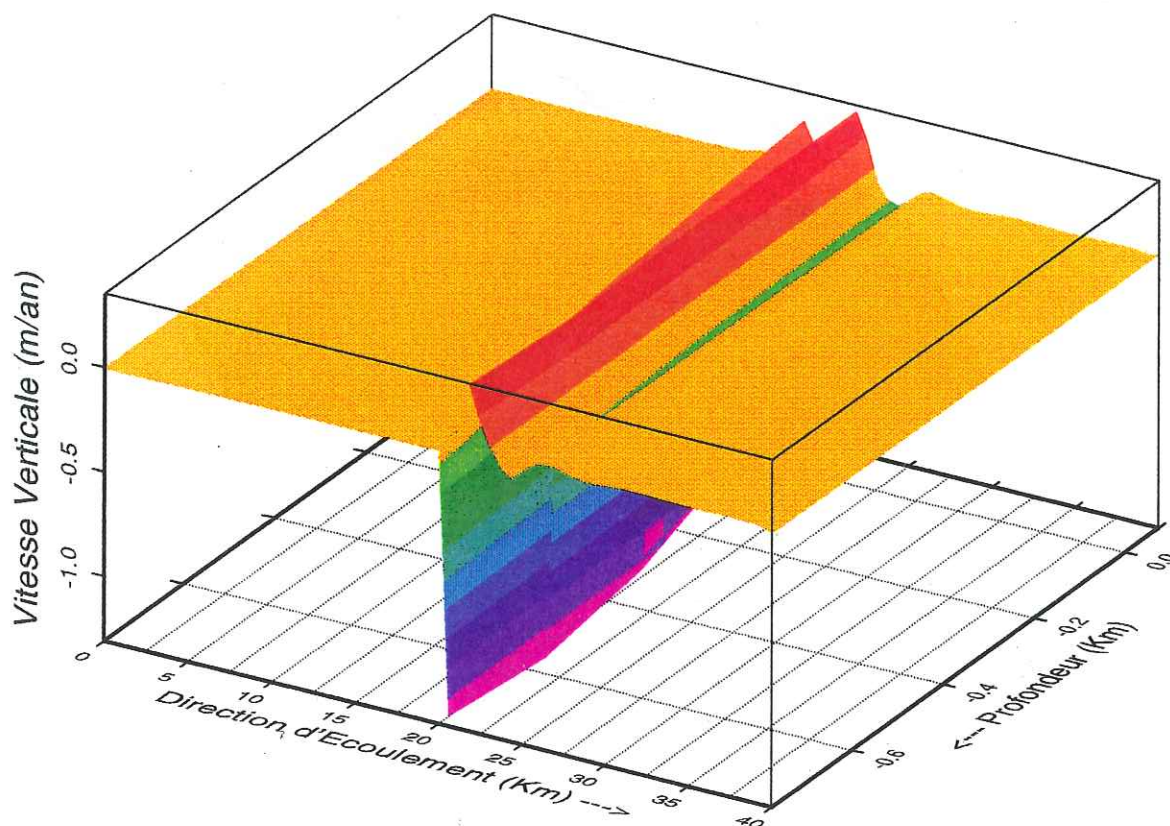


Fig. VI.4 : Vitesse verticale pour la transition calotte - ice shelf avec condition d'adhérence au socle.



# PRESSION

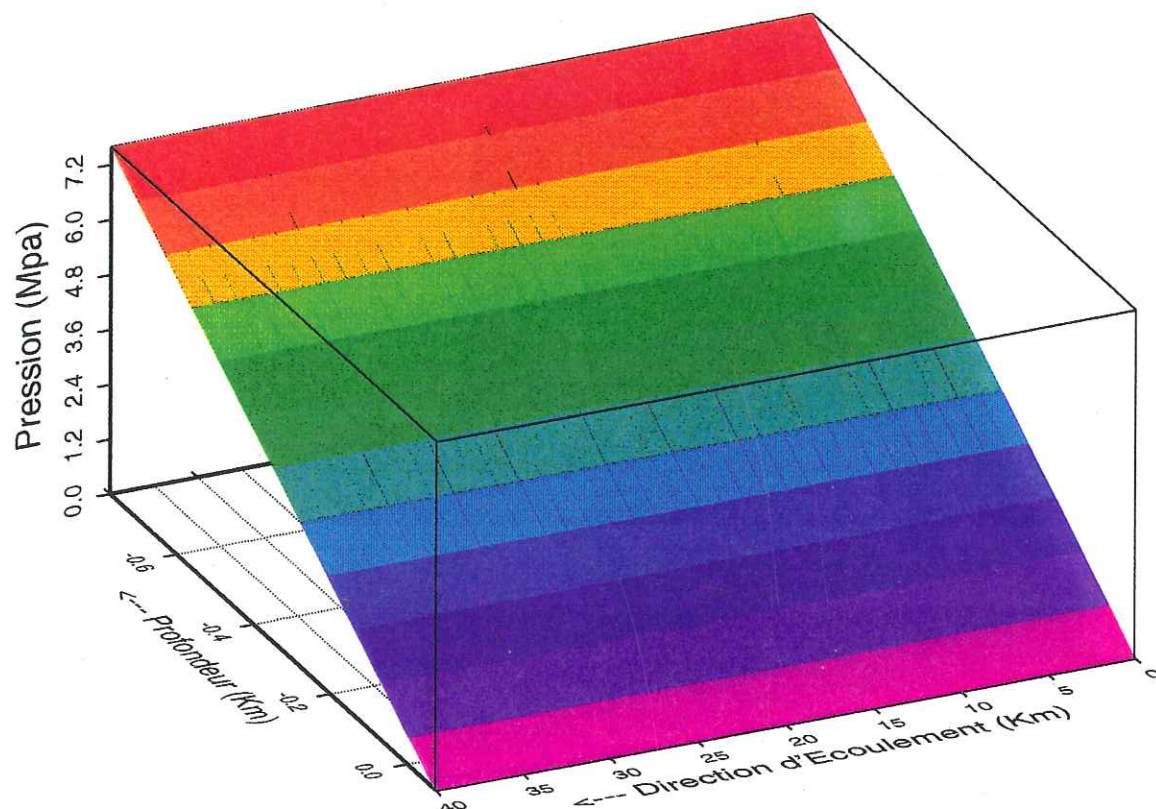


Fig. VI.5 : Pression pour la transition calotte - ice shelf avec condition d'adhérence au socle.



## CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

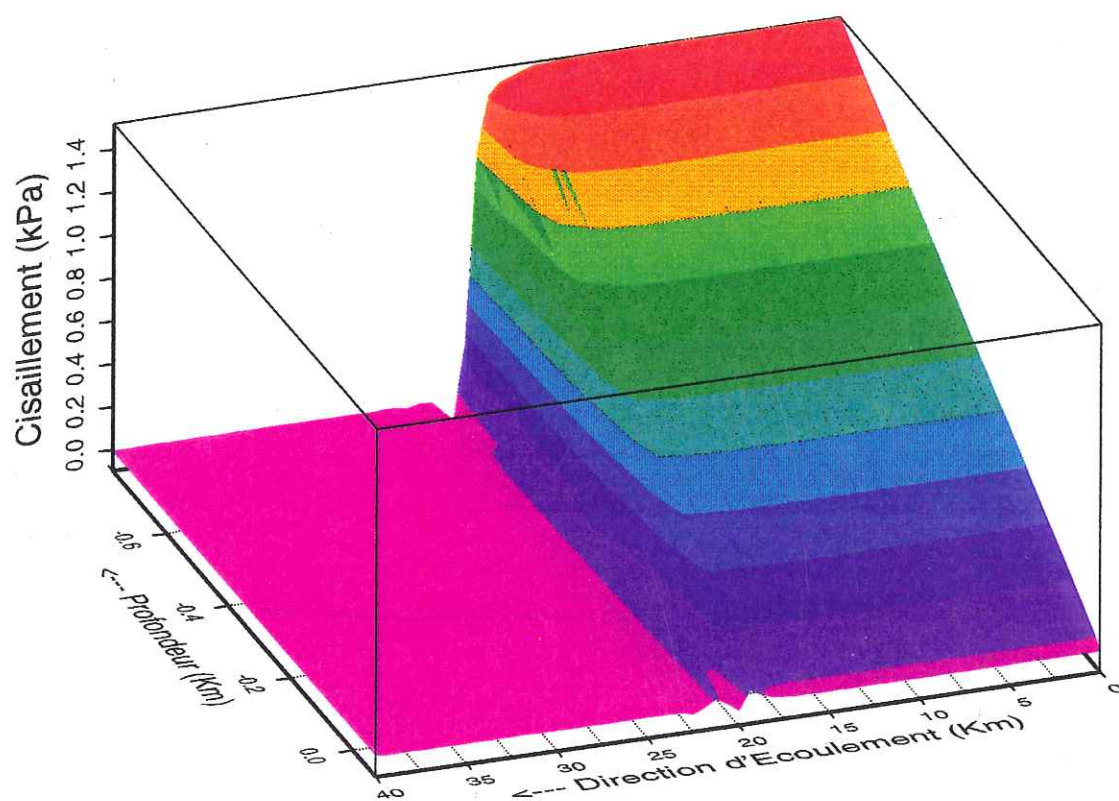


Fig. VI.6 : Cisaillement pour la transition calotte - ice shelf avec condition d'adhérence au socle.



## SURFACE SUPERIEURE

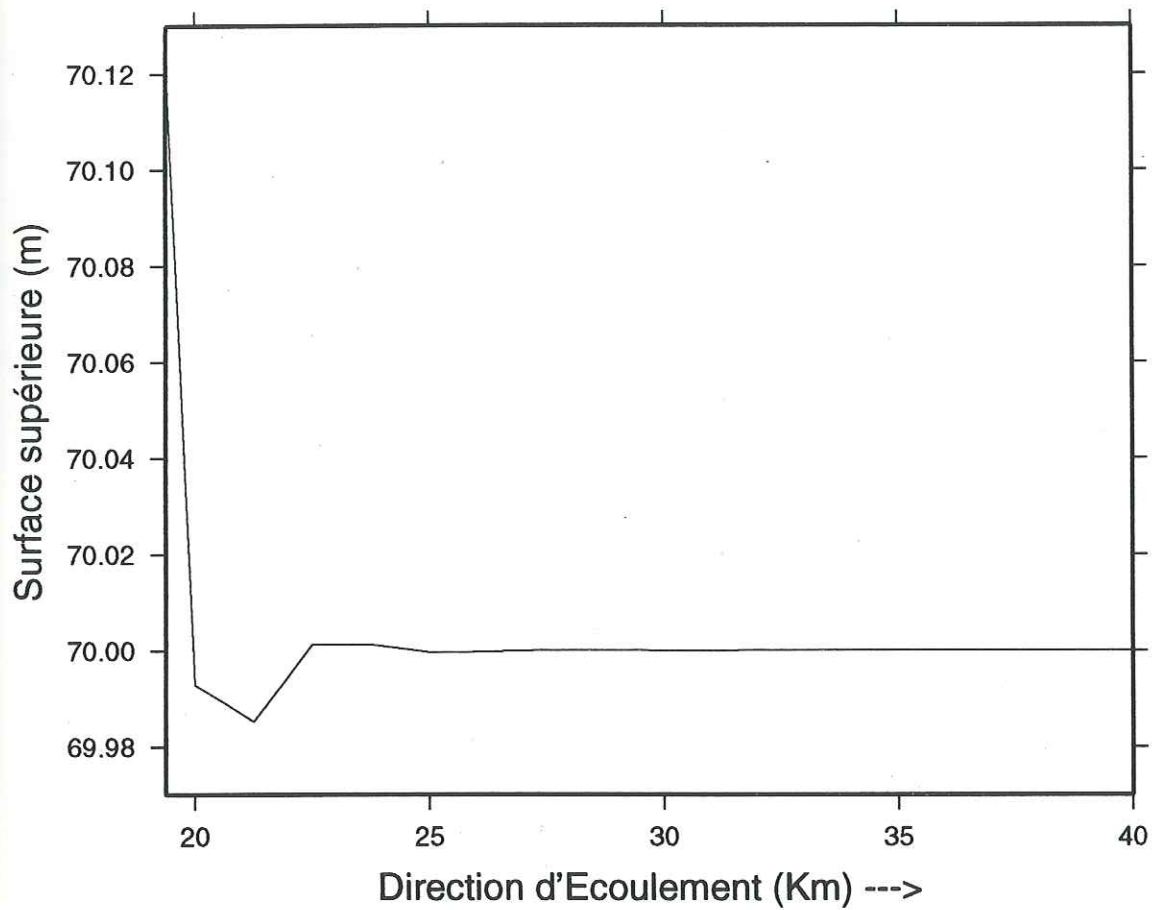


Fig. VI.7 : Profil d' équilibre de la surface supérieure.



## SURFACE FLOTTANTE

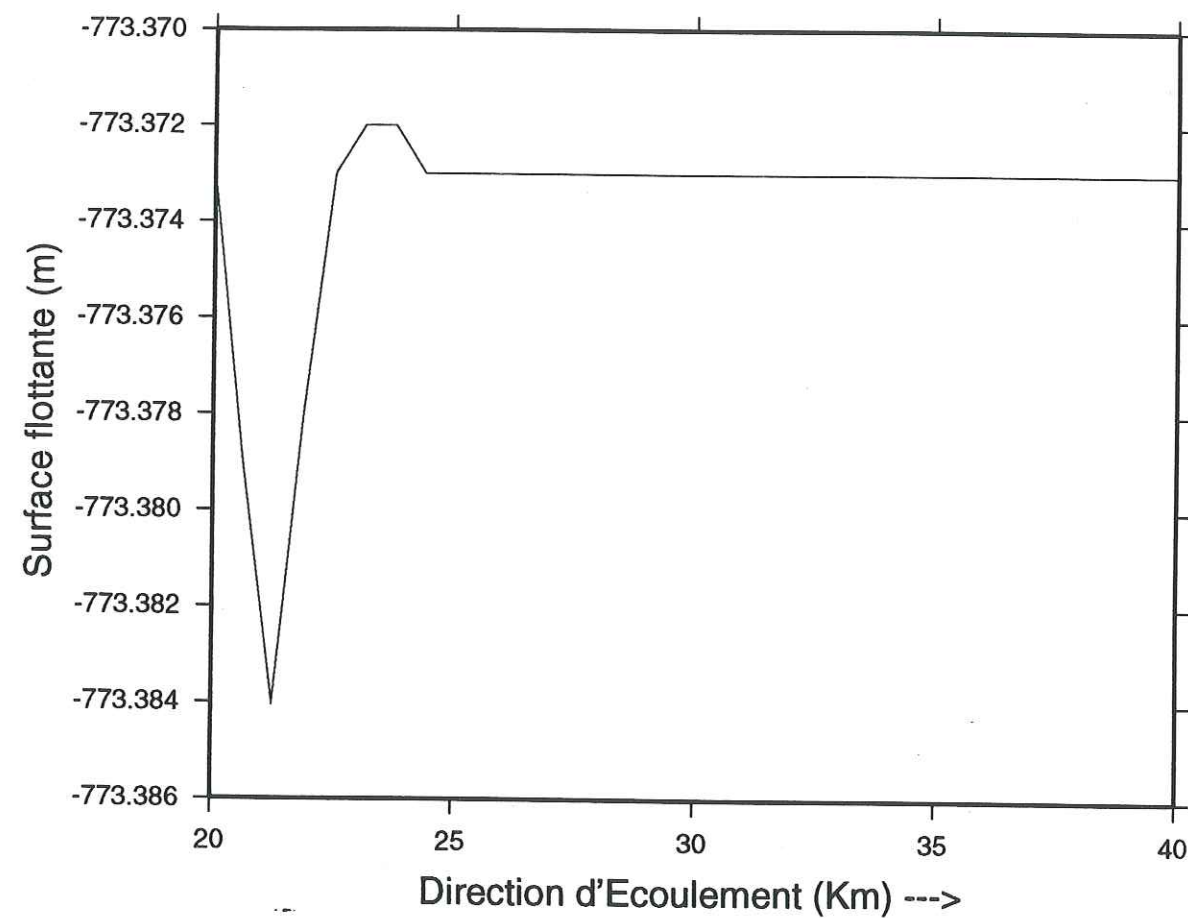


Fig. VI.8 : Profil d'équilibre de la surface flottante.

## RAPPORT ALTITUDE-PROFONDEUR

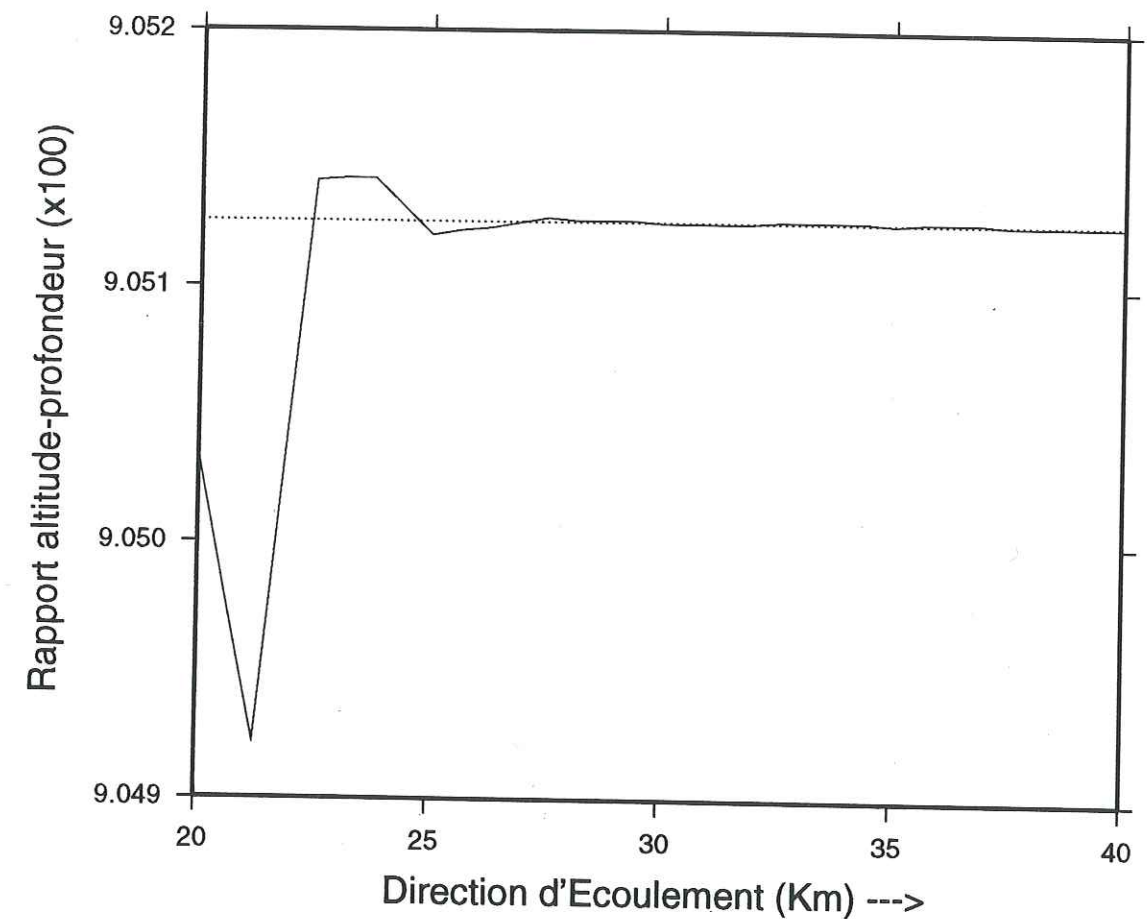
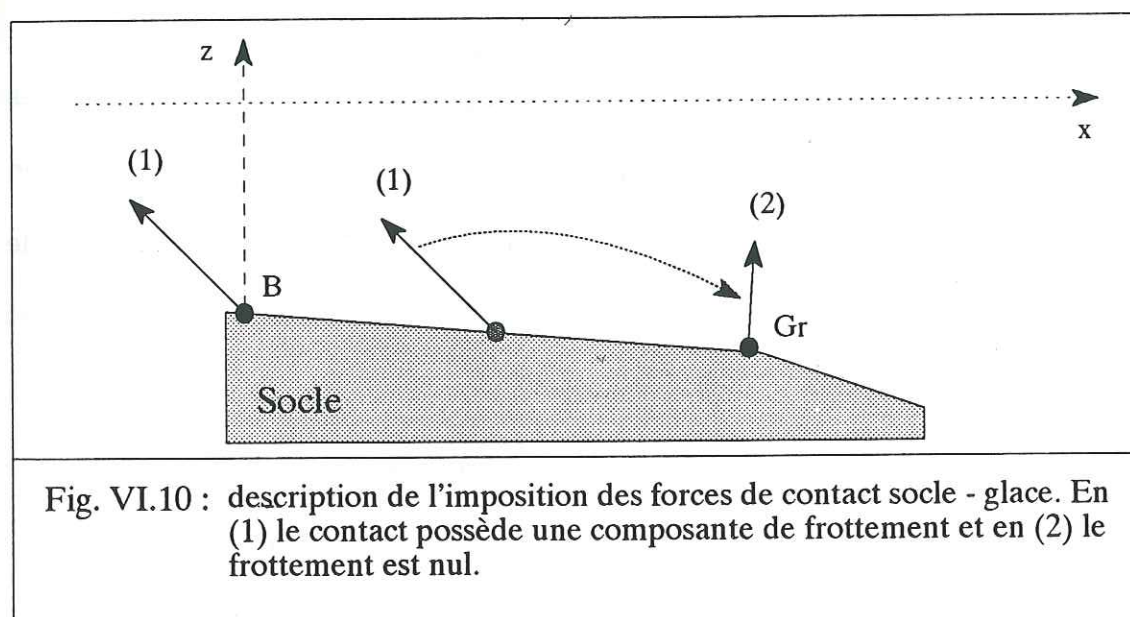


Fig. VI.9 : Comparaison entre les rapports "altitude-profondeur" calculé (-) et théorique (...) pour l'ice-shelf.



### β) simulation avec condition de glissement

Dans ce type de simulation on impose à l'interface glace - socle des forces de contact. Plus précisément, on divise le socle en deux parties (prises égales par convenance de programmation). De plus on choisit d'imposer la vitesse verticale et la composante horizontale de la force de contact qui, compte tenu de la très faible pente du socle, se confond avec la composante de frottement de la réaction du socle. Sur la partie la plus en amont le frottement est supposé "fort", c'est-à-dire correspondant à la valeur qui est la sienne dans l'écoulement de Poiseuille. Sur l'autre partie, le frottement varie linéairement de la valeur de Poiseuille à zéro, simulant ainsi une plus grande souplesse dans la transition (figure VI.10).



On peut raisonnablement se poser la question : pourquoi une telle modélisation ?

La composante de frottement de la réaction est sa composante tangentielle et s'écrit :

$$T_{\text{tang}} = -n_z T_x + n_x T_z$$

où  $n_x$  et  $n_z$  sont les composantes de la normale extérieure à la surface de contact,



et  $T_x$  et  $T_z$  les deux composantes de la force extérieure imposée sur la surface du fluide. Dans nos applications  $n_x$  est de l'ordre de  $10^{-3}$  ou  $10^{-4}$  en valeur absolue et  $n_z$  très proche de -1. Ainsi  $T_{tang}$  est très voisin de  $T_x$ .  $T_x$  est lui-même une combinaison linéaire de composantes du tenseur des contraintes :

$$T_x = n_x \sigma_{xx} + n_z \sigma_{xz}$$

On pourrait choisir des expressions pour la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  et pour le cisaillement  $\sigma_{xz}$  basaux. Mais ce ne serait pas "propre" car on imposerait alors un certain type de contrainte à l'écoulement et j'ai toujours évité d'influencer les solutions. C'est pourquoi il m'a semblé plus naturel d'imposer une expression du frottement basal, sans toutefois chercher à décrire les phénomènes qui pourraient en rendre compte.

Les résultats ne sont fondamentalement pas différents de ceux présentés précédemment. Seule la vitesse horizontale  $U$  (fig. VI.11) est intéressante car on peut y déceler l'action de la condition aux limites imposée : la vitesse basale s'adapte, en s'accroissant légèrement, de façon à assouplir la transition entre les deux régimes d'écoulement.

On devra également remarquer qu'au-dessus de la zone ancrée il n'existe aucune distorsion du champ de vitesse horizontale ; en particulier au milieu de cette zone où la force imposée se met à varier. Ceci met en évidence la qualité de cette condition aux limites basale.

## VITESSE HORIZONTALE

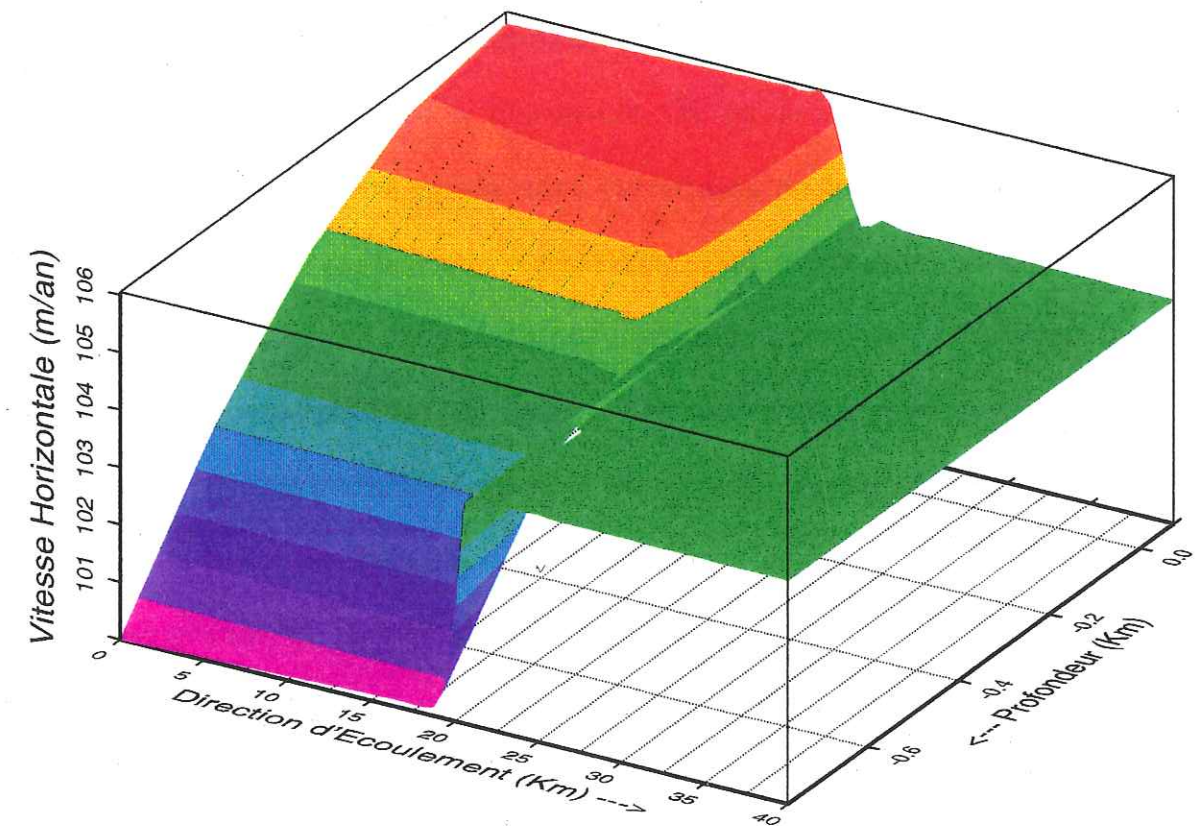


Fig. VI.11 : Vitesse horizontale pour la transition calotte - ice shelf avec condition de glissement sur le socle.



*γ) pour aller plus loin*

Revenons à ce qui a motivé cette étude (et cette thèse) : comment tenir compte d'une zone de transition abrupte "calotte - ice shelf" dans une modélisation globale de la masse de glace ?

Trois voies sont possibles : soit incorporer le programme comme si c'était un module, soit essayer d'extraire ce qui semble le plus significatif dans ces résultats. Seule la seconde offre matière à discussion. Je pense que le point le plus significatif dans ces résultats réside dans l'étroitesse de la zone dans laquelle s'effectue la transition entre les deux régimes d'écoulement : tout au plus quelques fois l'épaisseur. On pourrait être tenté par démarche suivante : *"cherchons des formes analytiques permettant de reproduire les changements observés et introduisons les comme paramétrisation de la zone de transition"*. Ce n'est pas facile à réaliser. Des tentatives ont déjà été menées dans cette direction, mais la sensibilité est grande (C. Ritz, communication personnelle).

J'entrevois une solution plus radicale (R. Hindmarsh est également partisan de cette démarche, communication personnelle et [52]) : découpler les deux parties du système et les traiter séparément puisqu'elles sont caractérisées par des propriétés radicalement différentes. La transition est alors modélisée par une condition de flux de matière permettant de connaître la vitesse à l'entrée de l'ice shelf.



Allons plus loin.

Les résultats acquis ne sont pas dépendants du cas particulier "calotte - ice shelf". Dès lors, est-il impossible de penser la modélisation du système inlandsis comme la juxtaposition des modélisations découplées de ces différents types de sous-systèmes, et reliées entre eux par des conditions de raccord et par la modélisation de la cinématique de ces zones de transition si besoin est ?

### c) Conclusion

On a étudié une zone de transition abrupte "calotte - ice shelf" à deux dimensions idéalisée afin de déterminer les principales caractéristiques mécaniques de l'écoulement. Les principaux résultats sont les suivants :

- la transition entre le régime d'écoulement de la calotte et celui de l'ice shelf s'effectue sur une petite zone centrée autour du point d'ancrage, dont l'extension est de l'ordre de quelque fois l'épaisseur.
- l'ice shelf n'est pas en équilibre hydrostatique quand il commence à flotter. Il s'enfonce légèrement en-dessous du niveau théorique de flottaison sur une distance de une à deux fois l'épaisseur, puis regagne la position d'équilibre.
- conformément aux conclusions du chapitre V, on peut affirmer qu'il n'y a pas de singularité non-bornée dans le cisaillement.



# VII

**ETUDE PRELIMINAIRE EN 3D**  
**DE LA TRANSITION**  
**"ADHERENCE - ECOULEMENT LIBRE"**



**ETUDE PRELIMINAIRE EN 3D DE LA TRANSITION  
"ADHERENCE - ECOULEMENT LIBRE"**

a) Introduction

On reprend le problème du chapitre V) consacré à la transition "adhérence - écoulement libre". L'intérêt de le considérer en trois dimensions provient de ce que les glaciers ou ice streams nourrissant un ice shelf sont confinés latéralement soit par des bords rocheux, soit par des crêtes séparant plusieurs affluents de l'ice shelf. De plus, l'ice shelf joue le rôle de puits de vitesse puisque ces affluents en s'y jetant subissent un ralentissement similaire à celui d'un fleuve dans un delta. Parce que cette étude arrive en fin de thèse, il ne m'a pas été possible de la mener dans son ensemble. C'est pour cela que l'on donne seulement des résultats préliminaires. Pour pouvoir donner d'autres résultats il aurait fallu que j'introduise une évolution de la surface libre.

b) Modélisation du problème

*α) présentation*

Les conditions physiques de cette étude sont exactement les mêmes que celles du chapitre V) :

- fluide incompressible de viscosité constante régi par les équations de Stokes.
- il existe un plan tel que de l'infini amont à celui-ci le fluide adhère aux parois, et tel que de celui-ci à l'infini aval le fluide ne subit plus aucune force de



frottement.

La seule différence réside dans le fait que l'écoulement a lieu dans un chenal de section rectangulaire.

β) *méthode numérique, conditions aux limites et résultat*

La méthode numérique utilisée est la méthode d'éléments finis exposée tout au long du chapitre IV). La particularité du 3D a été présentée au paragraphe IV,e). La question des conditions aux limites pour les deux sections verticales d'entrée et de sortie est similaire à celle du problème en 2D. On a le choix entre des conditions "naturelles" pour lesquelles l'écoulement amont est supposé être celui du chenal avec adhérence sur les parois de tout le domaine (voir le test IV,h,δ), et des conditions "mixtes" qui permettent de ne pas prescrire une forme a priori de la solution en vitesse horizontale. Les problèmes soulevés par le premier jeu de conditions aux limites sont les mêmes que ceux de l'étude en 2D. On a donc tenu compte de l'expérience passée et seul le jeu mixte a été utilisé.

Les éléments de ce jeu sont les suivants :

- on impose la composante horizontale de la force qui ne contient que l'effet de la pression.
- on impose les vitesses  $V = W = 0$ , ce qui signifie que l'écoulement infini amont se fait parallèlement au socle.

Les autres conditions aux limites sont les suivantes :

- dans la partie avec adhérence, on a :  $U = V = W = 0$ .
- sur les parois verticales de la zone sans frottement :  $F_x = 0$ ,  $V = 0$ ,  $F_z = 0$
- sur le socle de la zone sans frottement :  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0$ ,  $W = 0$

La géométrie est particulièrement simple et le repère choisi de façon aussi naturelle que pour le chapitre V).

On présente le résultat obtenu pour la vitesse horizontale. Représenter un champ à trois variables d'espace n'est pas aisé. C'est pour cela que le résultat (figure VII.1) est donné pour la section longitudinale médiane du chenal.

La solution en vitesse horizontale possède les mêmes caractéristiques que la vitesse horizontale pour le problème à deux dimensions : on obtient une importante perturbation par la partie singulière.

Le problème étant à 3D, il ne sera sûrement pas possible de déterminer analytiquement la solution singulière. On peut néanmoins conjecturer sans trop de risques que la prise en compte de l'évolution de la surface libre devrait éliminer la singularité.



## VITESSE HORIZONTALE

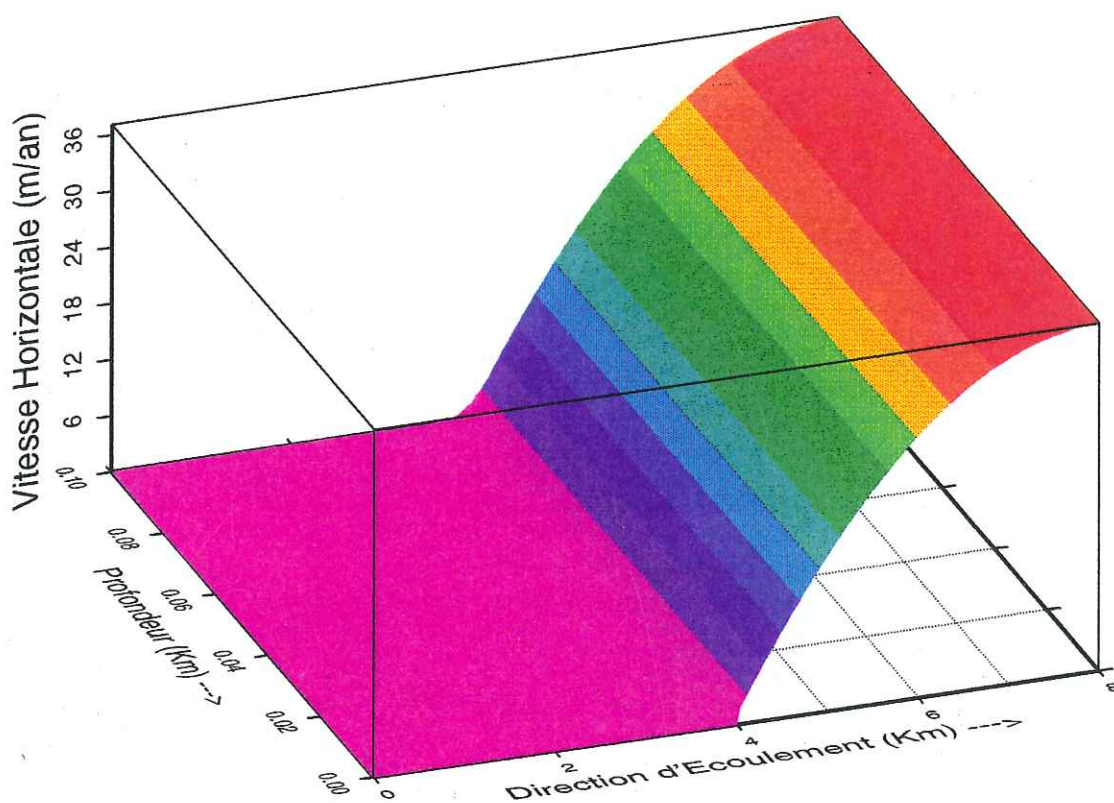


Fig. VII.1 : Vitesse horizontale dans la section longitudinale médiane du chenal pour la transition "adhérence - écoulement libre" en 3D.



# VIII

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES



## CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

### Conclusions

Les travaux présentés dans cette thèse sont axés sur l'étude des transitions abruptes "fort frottement - faible frottement", avec une application aux transitions "calottes - ice shelf".

Les transitions abruptes "fort frottement - faible frottement" apparaissent fréquemment dans les écoulements des masses glaciaires, et leur modélisation requiert une étude spécifique.

On résout numériquement les équations incompressibles de Stokes en 2D ou 3D dans le cas stationnaire, et on tient compte de l'évolution des surfaces libres. La méthode numérique utilisée est une méthode d'éléments finis en variables principales dans l'approche de Galerkin. On recherche les champs de vitesses, pression, cisaillement et les surfaces libres à l'équilibre.

Trois problèmes ont été abordés :

- la transition "adhérence - écoulement libre" en 2D. Ce problème peut être considéré comme l'archétype des problèmes de transitions "fort frottement - faible frottement". Sa résolution apporte des réponses aussi bien physiques sur la nature de l'écoulement, que mathématiques sur la régularité des solutions. Ce dernier point fait apparaître que la solution générale du problème peut être décomposée



en une partie régulière et en une partie singulière. Cette partie singulière est non-bornée pour la pression, ce qui en fait un diagnostic de la présence de la singularité. A la vue des résultats numériques il apparaît que la singularité est progressivement éliminée de la solution générale par suite de l'évolution de la surface libre du problème.

- la transition abrupte "calotte - ice shelf" peut être considérée comme un cas particulier de la première étude, car on a simplifié ses caractéristiques physiques. On a considéré que la glace est isotherme et de densité constante, et on ne tient pas compte de processus d'accumulation - ablation.

Les simulations ont été effectuées en utilisant deux jeux de conditions aux limites : soit la glace adhère au socle, soit le frottement basal varie progressivement d'une valeur de fort frottement à une valeur de frottement nul. Dans les deux cas, les résultats obtenus permettent de conclure qu'il existe deux régimes d'écoulement (le régime calotte et le régime shelf), et que la transition s'effectue dans une zone centrée autour du changement de conditions aux limites et dont l'extension est de l'ordre de quelques fois l'épaisseur. La seule particularité du second jeu de conditions aux limites est d'assouplir les variations de la vitesse horizontale sur le socle.

Un autre point important concerne la géométrie du système après évolution de la transition. Il apparaît que l'ice shelf ne respecte pas le rapport théorique de flottaison à la sortie du socle : il s'enfonce légèrement avant de retrouver l'équilibre hydrostatique, ce qui est effectivement observé sur le terrain.

Le dernier résultat concerne l'existence possible d'une singularité physique au passage entre les deux types de conditions basales. En utilisant les résultats sur la pression et l'analyse pour le cas de la transition "adhérence - écoulement libre", il est permis de dire que l'évolution des surfaces libres évacue la singularité.

- la transition "adhérence - écoulement libre en 3D. Ce problème est la généralisation du problème en deux dimensions. L'intérêt de l'étude repose sur la prise en compte des effets dus aux parois latérales qui confinent l'écoulement. L'étude donne uniquement des résultats préliminaires, car l'absence de module d'évolution des surfaces libres ne permet pas d'obtenir de résultats plus précis. Les résultats obtenus permettent de mettre en évidence la présence d'une singularité dans la solution générale.

### Perspectives

En premier lieu, il semble nécessaire d'étendre l'étude sur la transition "calotte - ice shelf" en simulant en 3D l'entrée d'un glacier émissaire confiné dans un ice shelf. Le but d'une telle étude est de tenir compte des effets de frottement latéral et de puits de vitesse que constitue l'ice shelf.

Ensuite, il faudrait poursuivre l'étude numérique et mathématique de la transition "adhérence - écoulement libre" en 3D.



# ANNEXES



**A1**

**SOLUTION DE L'ÉCOULEMENT DE  
POISEUILLE APPLIQUÉ À LA GLACE  
AVEC UNE VISCOSITÉ SUIVANT LA  
LOI DE SMITH ET MORLAND**

**SOLUTION DE L'ÉCOULEMENT DE POISEUILLE  
APPLIQUÉ À LA GLACE AVEC UNE VISCOSITÉ  
SUIVANT LA LOI DE SMITH ET MORLAND**

Le problème de l'écoulement de Poiseuille est un des plus simples qui soit. On recherche les caractéristiques de l'écoulement permanent d'une plaque infinie d'épaisseur uniforme d'un matériau fluide pesant homogène. L'écoulement se fait sur un socle infiniment plat. Le repère choisi a son axe horizontal parallèle au socle, son axe vertical dirigé du bas vers le haut et son origine quelque part sur le socle. Les hypothèses de base de cet écoulement permettent de conclure qu'il est caractérisé par : le vecteur vitesse est parallèle au socle dans tout le fluide, aucune grandeur ne pourra dépendre de la variable horizontale, et le terme d'accélération des équations de Navier-Stokes est nul. Ainsi les équations de Navier-Stokes se simplifient beaucoup et fournissent deux équations découplées, l'une pour la pression et l'autre pour la contrainte de cisaillement. La première permet de retrouver le caractère hydrostatique de la pression. La seconde a la forme suivante :

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = -\rho g \sin \alpha \quad (\text{A1.1})$$

Son intégration, compte tenu de la condition aux limites  $\tau(z=H) = 0$ , permet d'obtenir l'expression :

$$\tau(z) = \rho g \sin \alpha (H-z) \quad (\text{A1.2})$$

Or avec les hypothèses ci-dessus et compte tenu que le matériau est un fluide,  $\tau$



est relié aux vitesses par la relation :

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial z} = \mu \dot{\gamma} \quad (\text{A1.3})$$

Où  $\mu$  est la viscosité et  $\dot{\gamma}$  est un deuxième invariant du tenseur des taux de déformation dont la forme se simplifie comme ci-dessus par suite de la nature du problème.

L'hypothèse physique de base pour la forme des lois de viscosité est qu'elles dépendent exclusivement du second invariant des taux de déformation. La forme qui fait l'objet de cette annexe a été déduite par Smith et Morland [23]. Le but affiché était de déterminer une loi qui ne pose pas de problème pour les très faibles taux de déformation. Ils ont répondu à la question en utilisant divers ensembles de données expérimentales et en ajustant une approximation non-linéaire de ces données. La forme analytique est la suivante :

$$\mu = \dot{\gamma}^{-1} [1.15 \cdot 10^5 \operatorname{Arctg}(0.929 \dot{\gamma}) + 2.479 \cdot 10^5 \operatorname{Arctg}(0.01185 \dot{\gamma})] \quad (\text{A1.4})$$

On obtient finalement l'équation :

$$\rho g \sin \alpha (H-z) = 1.15 \cdot 10^5 \operatorname{Arctg}(0.929 \dot{\gamma}) + 2.479 \cdot 10^5 \operatorname{Arctg}(0.01185 \dot{\gamma}) \quad (\text{A1.5})$$

Pour simplifier la présentation on notera  $a = 1.15 \cdot 10^5$ ,  $\alpha = 0.929$ ,  $b = 2.479 \cdot 10^5$  et  $\beta = 0.01185$ . Cette équation n'admet pas de solution analytique car aucune formule trigonométrique ne permet de contracter les deux  $\operatorname{Arctg}$ . Néanmoins il est possible d'en déterminer une solution approchée lorsque les taux de déformation sont très petits, ce qui est nécessairement le cas dans les écoulements de glace. les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement  $O(1)$  et  $O(10^{-2})$ . Il est donc possible d'utiliser le développement limité de la fonction  $\operatorname{Arctg}$  au voisinage de zéro. On a, en se

limitant aux termes du troisième ordre :

$$\begin{cases} \text{Arctg}(\alpha\dot{\gamma}) \approx \alpha\dot{\gamma} - \frac{(\alpha\dot{\gamma})^3}{3} \\ \text{Arctg}(\beta\dot{\gamma}) \approx \beta\dot{\gamma} - \frac{(\beta\dot{\gamma})^3}{3} \end{cases} \quad (\text{A1.6})$$

On obtient alors une expression approchée pour le cisaillement  $\tau$  qui se met sous la forme suivante :

$$\tau(z) = (a\alpha + b\beta)\dot{\gamma} - \left(\frac{a\alpha^3 + b\beta^3}{3}\right)\dot{\gamma}^3 \triangleq \theta_1 - \theta_2 \quad (\text{A1.7})$$

Dans ce cas on a encore une équation difficile à résoudre car les types de solutions dépendent de combinaisons sur les coefficients. Néanmoins, on peut simplifier cette équation car  $\theta_1 \ll \theta_2$ . On obtient ainsi une équation linéaire en  $\dot{\gamma}$ :

$$\begin{aligned} & \tau(z) \triangleq (a\alpha + b\beta)\dot{\gamma} \triangleq \frac{1}{A} \dot{\gamma} \\ & \text{ce qui permet d'écrire : } \frac{\partial U}{\partial z} = A(\rho g \sin \alpha)(H-z) \quad (\text{A1.8}) \\ & A \text{ étant égal à : } 9.1097402 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Ceci s'intègre facilement :

$$U(z) = U(0) + \frac{A(\rho g \sin \alpha)}{2} [H^2 - (H-z)^2] \quad (\text{A1.9})$$

Remarques :

1) on a obtenu un profil quadratique pour  $U$  alors que pour la loi de Glen, avec un exposant  $n = 3$ , il est en puissance quatre.

2) si l'on utilise le terme cubique du développement limité, l'étude de la résolubilité de l'équation du troisième degré montre qu'il n'y a pas de solution

physiquement acceptable pour  $\dot{\gamma}$  (c-à-d positive). Utiliser un développement d'ordre plus élevé ne permettant pas une résolution analytique, la recherche des termes correctifs devient vaine.



**A2**

**UNE METHODE DE POINT FIXE  
POUR RESOUDRE LES  
SYSTEMES D'EQUATIONS**

## UNE METHODE DE POINT FIXE POUR RESOUDRE LES SYSTEMES D'EQUATIONS

La discrétisation par élément finis fournit un système d'équations dont la recherche de la solution passe inévitablement par une inversion de matrice. On touche au défaut majeur de la méthode d'éléments finis : la taille de la matrice est très importante, ce qui peut rendre son stockage en mémoire impossible et conduit à des temps de calculs parfois rédhibitoires.

On peut alors se demander s'il ne serait pas possible d'éviter l'assemblage de la matrice globale de la méthode. I. Zeid [31a,b] propose une méthode basée sur un principe de point fixe qui permet en principe de résoudre le système, mais aussi de travailler au niveau de chaque élément.

Je n'ai pas utilisé cette méthode pour l'un de mes programmes mais j'ai testée sa validité générale ainsi que son applicabilité pour les éléments finis.

### a) Principe d'une méthode de point fixe :

Donnons nous une fonction  $f$  à une variable et cherchons à résoudre l'équation  $f(x) = 0$ . Les méthodes numériques classiques de résolution d'une telle équation permettent de la réécrire sous la forme  $x = g(x)$  où  $g$  dépend de la méthode employée. D'un point de vue pratique la solution est recherchée par une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  définie par  $x_0$  donné et  $x_{n+1} = g(x_n)$ . La bonne qualité du processus dépend du choix de  $x_0$ , du comportement de  $f$  au voisinage de la racine que l'on recherche, et de la fonction  $g$ . On a une condition nécessaire et suffisante pour



l'existence et l'unicité de la solution :  $g$  doit être différentiable et localement contractante (  $\|g(x) - g(y)\| \leq k \|x - y\|$  où  $k \leq 1$  ).

b) Application à la résolution d'un système d'équations :

I. Zeid propose de remplacer une équation du type  $A.x = b$  (en minuscules les vecteur et en majuscules les matrices) par la formulation :

$$x_{n+1} = x_n + C^{-1} \cdot \{b - A.x_n\} = g(x_n) \quad A2.1$$

où  $C$  est une matrice quelconque mais inversible et  $C^{-1}$  représente un inverse approché de  $A$ . La fonction  $g$  devant être contractante on a :

$$\|g(x_{n+1}) - g(x_n)\|_{\infty} \leq K \|x_{n+1} - x_n\|_{\infty} \quad \text{avec } K \leq 1 \quad A2.2$$

En se servant de la définition de  $g$  il est facile de montrer que  $K$  prend la valeur suivante :  $K = \|I - C^{-1} A\|_{\infty}$ . A2.3

Le but de l'application étant de ne pas avoir à inverser la matrice  $A$ , il ne faudrait pas que le problème soit déplacé vers l'inversion de  $C$ . En fait ce n'est pas  $C$  en soi qui nous intéresse mais son inverse. Le choix le plus simple à faire est de supposer que  $C^{-1}$  est diagonale, soit  $\Lambda$ . Les composantes  $\Lambda_{ii}$  de  $\Lambda$  seront déterminées en faisant un choix particulier de norme et en imposant à  $K$  d'être plus petit que l'unité :  $K = \|I - C^{-1} A\|_{\infty}$ . La meilleure des valeurs possibles pour  $K$  c'est zéro.

Cela permet d'obtenir les relation suivantes :

$$1 - \Lambda_{ii} \sum_{j=1}^m |A_{ij}| = 0 \quad i \text{ de } 1 \text{ à } m$$

d'où l'on déduit l'expression des  $\Lambda_{ii}$ . Cette formule est calculable sans avoir à assembler la matrice globale.

c) Mise en pratique de la méthode :

J'ai testé la méthode sur des matrices ordinaires et sur des matrices provenant de la discrétisation par éléments finis. Dans le premier cas on peut obtenir des résultats satisfaisants, avec néanmoins des choix un peu sensibles pour la valeur initiale  $x_0$ . Pour le cas qui a motivé cette étude, je serais plus partagé quant aux conclusions : les résultats peuvent être satisfaisants sans être excellents. De plus, la partie de la solution relative à la pression est trop sensible au choix de la condition initiale qui doit être pratiquement égale à la solution désirée. Compte tenu du travail que j'ai effectué sur cette méthode, je pense que là aussi la nature particulière de la solution en pression est la cause de ce manque d'applicabilité.

d) Conclusion :

La méthode présentée possède l'avantage d'éliminer l'assemblage de la matrice globale, sans toutefois être aussi performante qu'une méthode classique d'inversion. Néanmoins, si les moyens informatiques dont on dispose sont trop faibles, cette méthode peut s'avérer utile pour aborder une implémentation de la méthode des éléments finis.

A3

**CONSEQUENCES DE LA VIOLATION  
DE LA CONDITION DE STABILITE  
D'UNE PAIRE DE REPRESENTATION  
VITESSE - PRESSION**



**CONSEQUENCES DE LA VIOLATION DE LA  
CONDITION DE STABILITE D'UNE PAIRE  
DE REPRESENTATION VITESSE - PRESSION**

Cette annexe se veut un petit complément du sous-paragraphe IV,c,β. La notion d' "admissibilité" d'une paire de représentation vitesse - pression est capitale dans la méthode d'élément finis appliquée aux fluides incompressibles. Cette difficulté est la conséquence de la condition d'incompressibilité qui est ajouté aux équations de Navier-Stokes. Si cette condition est absente la pression est déterminée par une équation d'état d'origine physique, mais si elle est prise en compte la pression devient un multiplicateur de Lagrange qui doit être déterminé comme une variable indépendante.

Quelques auteurs dont Babuška [32,33] ont établi un critère (la div-condition) définissant l'admissibilité des paires. Il n'est pas dans mon intention de rentrer dans les détails techniques. Il est néanmoins instructif de connaître les conséquences du non-respect de ce critère. Il peut être violé selon trois modes (voir [34] p 9 à 24).

# la seule solution en vitesse est la solution nulle :

Cela est possible seulement s'il n'y a pas plus de variables de vitesse que de pression.

# il existe une solution en pression qui annule le critère :

on obtient alors ce qu'on appelle un mode de pression, c'est à dire une solution en

pression parasite qui s'introduit dans la solution en pression du problème. La conséquence de ce phénomène est la suivante : la solution en vitesse est suffisamment exacte , mais la solution en pression est fausse. Il est possible de filtrer la pression parasite et de récupérer la vraie pression.

Ces deux premiers types de violation sont relativement simples et peuvent être détectés par une étude de la matrice résultant de la discrétisation.

# Le troisième mode est plus subtil. Il met en jeu une violation dépendant du pas de discrétisation des éléments. La conséquence en est une perte de précision de la solution, spécialement la pression. Le seul moyen de détecter le problème est de ne pas utiliser un seul maillage pour effectuer les simulations numériques.

En conclusion : ne jamais prendre des interpolations au hasard et utiliser plusieurs maillages.

A4

## **CONTINUITE DES CONTRAINTES POUR UNE LOI DE GLEN**

### **CONDITIONS AUX LIMITES SUR UNE SURFACE LIBRE**



CONTINUITE DES CONTRAINTES POUR UNE LOI DE GLEN.  
CONDITIONS AUX LIMITES SUR UNE SURFACE LIBRE.

Cette annexe est consacrée à la détermination des relations pouvant exister entre les éléments du tenseur des contraintes quand ils sont considérés sur une surface libre. On montre d'une part que l'implication  $[(d_{xx} + d_{zz} = 0) \Rightarrow (\tau_{xx} + \tau_{zz} = 0)]$  n'est pas immédiate, et d'autre part que la condition aux limites  $\sigma_{zz}(\text{surface}) = 0$  ne peut pas être vraie sur une portion de la surface libre. On considère le problème uniquement en deux dimensions. Soit une courbe  $C$  servant de frontière entre le fluide et l'extérieur, on dira qu'elle est libre si les seuls efforts surfaciques extérieurs se réduisent à des efforts de pression. Ces derniers sont généralement dus à la présence d'une atmosphère ou à celle d'un support d'eau. Pour fixer les notations on appellera  $\underline{T}$  le vecteur contrainte déduit du tenseur des contraintes internes  $\underline{\sigma}$ ,  $\tau_{ij}$  les composantes du déviateur de  $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{n}$  la normale extérieure à la courbe  $C$ ,  $P_s$  la pression agissant sur  $C$  et  $M$  un point quelconque sur  $C$ . Toutes les autres notations sont communes à l'ensemble de la thèse. Par définition et caractérisation de la surface libre on a :

$$\underline{T} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = - P_s \underline{n}$$

Tous les calculs sont faits en considérant les différentes grandeurs comme définies au point  $M$  de la courbe  $C$ , mais cette dépendance ne sera pas explicitée pour ne pas alourdir l'écriture. Si on développe la relation ci-dessus on obtient :

$$\begin{cases} (1) & -P_s n_x = \sigma_{xx} n_x + \tau_{xz} n_z = (-P + \tau_{xx}) n_x + \tau_{xz} n_z \\ (2) & -P_s n_z = \tau_{xz} n_x + \sigma_{zz} n_z = (-P + \tau_{zz}) n_z + \tau_{xz} n_x \end{cases} \quad (A4.1)$$

Par combinaison linéaire de ces deux relations on peut en trouver deux autres :

$$\begin{cases} n_x(1) + n_z(2) & : & -P_s = -P + n_x n_z (\tau_{xx} + \tau_{zz}) + 2 n_x n_z \tau_{xz} \\ n_z(1) - n_x(2) & : & 0 = n_x n_z \tau_{xx} - n_x n_z \tau_{zz} + (n_z^2 - n_x^2) \tau_{xz} \end{cases} \quad (A4.2)$$

La glace est un matériau incompressible, ce qui se traduit par  $d_{xx} + d_{zz} = 0$ . Sous ces conditions la loi isotrope de déformation ne dépend plus que du deuxième invariant du tenseur des taux de déformation. La loi de Glen exprime cette dépendance sous la forme d'une loi puissance :

$$\begin{cases} \mu(\dot{\gamma}) = A (\dot{\gamma}^2)^{\frac{1-n}{2n}} \\ \text{où } n = 3, A \text{ est une constante} \\ \text{et } \dot{\gamma}^2 = 2 d_{ij} d_{ij} = 2 [d_{xx}^2 + d_{zz}^2 + 2 d_{xz}^2] \end{cases} \quad (A4.3)$$

L'expression de l'invariant peut être réduite en introduisant la relation d'incompressibilité. Finalement, la viscosité s'écrit sous la forme suivante :

$$\mu(\dot{\gamma}) = A [2 (d_{xx}^2 + d_{zz}^2)]^{-1/3} \quad (A4.4)$$

La loi de comportement d'un fluide incompressible lie linéairement le déviateur des contraintes aux taux de déformation :  $\tau_{ij} = 2 \mu d_{ij}$ . Ceci nous permet de déterminer les expressions pour  $\tau_{xx}$  et  $\tau_{xz}$  :



$$\begin{cases} \tau_{xx} = \frac{2^{2/3} A}{(d_{xx}^2 + d_{xz}^2)^{1/3}} d_{xx} \\ \tau_{xz} = \frac{2^{2/3} A}{(d_{xx}^2 + d_{xz}^2)^{1/3}} d_{xz} \end{cases} \quad (\text{A4.5})$$

Il est clair sur l'expression de la viscosité que celle-ci devient infinie lorsque les taux de déformation deviennent nuls simultanément. La question que l'on se pose est de savoir quel est le comportement des contraintes déviatoriques dans les mêmes conditions. Plus précisément peut-on définir la somme  $\tau_{xx} + \tau_{zz}$  ? Pour répondre à cette question on va étudier les expressions de  $\tau_{xx}$  et  $\tau_{xz}$  en considérant qu'elles dépendent des deux variables  $d_{xx}$  et  $d_{xz}$ , lesquelles définissent alors un espace fictif à deux dimensions. Comme il est classique dans les études de limites des fonctions à deux variables, on définit deux coordonnées polaires  $\rho$  et  $\theta$  telles que :  $d_{xx} = \rho \cos(\theta)$  et  $d_{xz} = \rho \sin(\theta)$ . Etudier la limite de la fonction lorsque  $(d_{xx}, d_{xz}) \rightarrow (0, 0)$  revient à étudier sa limite -en ayant effectué le changement de coordonnées- lorsque  $\rho \rightarrow 0$  pour toute valeur de  $\theta$  admissible dans le domaine.

Si l'on note avec un  $\sim$  les fonctions dépendant des nouvelles coordonnées on a :

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_{xx}(\rho, \theta) = \frac{2^{2/3} A}{(\rho^2)^{1/3}} \rho \cos \theta = 2^{2/3} A \rho^{1/3} \cos \theta \\ \tilde{\tau}_{xz}(\rho, \theta) = \frac{2^{2/3} A}{(\rho^2)^{1/3}} \rho \sin \theta = 2^{2/3} A \rho^{1/3} \sin \theta \end{cases} \quad (\text{A4.6})$$

Il est clair que la limite de ces fonctions lorsque  $\rho \rightarrow 0$  est nulle pour toutes les valeurs de  $\theta$ . Ceci veut dire que les contraintes déviatoriques sont bornées. On peut donc les définir sans ambiguïté en faisant un prolongement par continuité de ces fonctions en 0 :

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \frac{2^{2/3} A}{(d_{xx}^2 + d_{xz}^2)^{1/3}} d_{ij} & \text{si } (d_{xx}, d_{xz}) \neq (0, 0) \\ \tau_{ij} = 0 & \text{si } (d_{xx}, d_{xz}) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{A4.7})$$

Ainsi dans tous les cas de figure :

$$(d_{xx} + d_{zz} = 0) \Rightarrow (\tau_{xx} + \tau_{zz} = 0)$$

Ces résultats permettent de transformer les relations (A4.2) :

$$\begin{cases} (P - P_s) = 2 n_x n_z \tau_{xz} \\ \tau_{xz} (n_x^2 - n_z^2) = 2 n_x n_z \tau_{xx} \end{cases} \quad (\text{A4.8})$$

On observera qu'en dehors de deux jeux de valeurs très particuliers de  $n_x$  et  $n_z$  on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} [P_s = P] &\Leftrightarrow \tau_{xz} = 0 \\ [\tau_{xz} = 0] &\Leftrightarrow \tau_{xx} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A4.9})$$

Venons en maintenant à la condition  $\sigma_{zz}(M) = 0$ . Elle requiert tout d'abord que  $P_s = 0$  sur toute la surface. En imbriquant les deux relations (A4.8) et en supposant que  $|n_x| \neq |n_z|$  (ce qui est forcément vrai pour une géométrie modélisée de calotte) on obtient :

$$P = \frac{4 n_x^2 n_z^2}{n_x^2 - n_z^2} \tau_{xx} \quad (\text{A4.10})$$

Si on incorpore cette relation dans la définition de  $\sigma_{zz}$  et si on utilise la relation  $\tau_{xx} + \tau_{zz} = 0$ , alors  $\sigma_{zz}$  et  $\tau_{xx}$  sont liés de la façon suivante :



$$\sigma_{zz} = - \left[ 1 + \frac{4 n_x^2 n_z^2}{n_x^2 - n_z^2} \right] \tau_{xx} \quad (\text{A4.11})$$

L'annulation de  $\sigma_{zz}$  sur toute la surface libre peut avoir lieu dans deux cas. Soit le terme en crochet est nul sur toute la surface libre, ce qui entraîne l'existence d'une relation entre  $n_x^2$  et  $n_z^2$  dont la conséquence est inadmissible puisqu'il existerait une géométrie type quelque soit l'écoulement envisagé. Soit  $\tau_{xx}$  est nul sur toute la surface libre, ce qui signifie que  $d_{xx}$  est nul. Or  $d_{xx}$  est égal à  $\partial U / \partial x$ , et dire que le gradient horizontal de la vitesse horizontale pris en surface est nul revient à dire que la vitesse horizontale de surface est constante. A son tour cette conclusion n'est pas admissible.

# A5

## RELATION ENTRE UN PRINCIPE VARIATIONNEL, UNE FORMULATION VARIATIONNELLE ET UNE EQUATION DIFFERENTIELLE



**RELATION ENTRE UN PRINCIPE VARIATIONNEL,  
UNE FORMULATION VARIATIONNELLE ET  
UNE EQUATION DIFFERENTIELLE**

Le but de cette annexe est de montrer sur un exemple simple comment s'introduit la formulation d'un problème à partir des équations de base. l'exemple est tiré de l'ouvrage "Introduction aux méthodes des éléments finis" de G.Marchouk et V.Agochkov aux éditions MIR. Le problème abordé est celui de la détermination d'une courbe  $u(x)$  avec des extrémités fixes qui minimise une certaine fonctionnelle. Considérons la fonctionnelle :

$$J(u) = \int_0^1 \Pi(x, u, u') dx \quad (A5.1)$$

où  $\Pi$  est une fonction donnée continue avec ses dérivées premières et secondes. On suppose de plus que la fonction  $u(x)$  est continue, possède une dérivée  $u'(x)$  sur  $]0,1[$  et prend aux bornes de l'intervalle  $[0,1]$  des valeurs données  $u(0) = u_0$  et  $u(1) = u_1$ . On recherche les conditions nécessaires que doit remplir une fonction  $u(x)$  pour donner un extremum de la fonctionnelle  $J$ . On considère alors une variation de la fonction  $u$  :  $u_\alpha(x) = u(x) + \alpha\eta(x)$  où  $\alpha$  est un petit paramètre et  $\eta(x)$  une fonction quelconque mais vérifiant les conditions :  $\eta(0) = \eta(1) = 0$  qui permettent d'assurer l'égalité de  $u_\alpha(x)$  et  $u(x)$  en  $x=0$  et  $x=1$ . On calcule  $J$  avec  $u_\alpha$  ce qui nous donne :



$$J(u_\alpha) = \int_0^1 \Pi(x, u + \alpha \eta(x), u' + \alpha \eta'(x)) dx \quad (A5.2)$$

On peut dès lors considérer  $J(u_\alpha)$  comme une fonction du seul paramètre  $\alpha : \Phi(\alpha)$ .

On appelle **variation première** de la fonctionnelle  $J$  la dérivée première de  $\Phi(\alpha)$  calculée en  $\alpha = 0$ . Elle est notée  $\delta J$ . En dérivant  $\Phi(\alpha)$  et en tenant compte des deux conditions sur  $\eta$  on obtient :

$$\delta J = \int_0^1 (\Pi_u \eta + \Pi_{u'} \eta') dx \quad (A5.3)$$

où  $\Pi_u$  et  $\Pi_{u'}$  désignent les dérivées de  $\Pi$  relativement à  $u$  et  $u'$

On procède à une intégration par parties sur le terme contenant  $\eta'$ , ce qui permet d'obtenir l'expression suivante :

$$\delta J = \int_0^1 \eta(x) \left[ \Pi_u - \frac{d}{dx} \Pi_{u'} \right] dx \quad (A5.4)$$

La fonction  $\eta(x)$  étant arbitraire, la courbe  $u(x)$  prenant les valeurs  $u_0$  et  $u_1$  et réalisant un extremum de la fonctionnelle  $J(u)$  doit être solution de l'équation différentielle :

$$\Pi_u - \frac{d}{dx} \Pi_{u'} = 0 \quad (A5.5)$$

appelée généralement *équation d'Euler*.

Illustrons ces résultats à l'aide de la fonction  $\Pi$  suivante :

$$\Pi = \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + q u^2 - 2 f u \quad (A5.6)$$

où  $q$  et  $f$  sont suffisamment différentiables et  $q \geq 0$ . L'équation d'Euler associée à cette fonction est :

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + q(x) u(x) = f(x) \quad (A5.7)$$

Remarque : lorsque  $q=0$   $u$  est solution du problème du régime thermique permanent au sein d'un matériau linéaire et uniforme en présence d'une source linéique  $f(x)$ .

la fonctionnelle  $J$  associée à l'exemple illustratif est :

$$J(u) = \int_0^1 \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + q u^2 - 2 f u \right] dx \quad (A5.8)$$

En résumé :

On constate donc qu'étant parti d'un principe variationnel " $J(u)$  et la recherche d'une solution réalisant un extremum", on est passé par une formulation variationnelle utilisant une fonction test  $\eta$  (éq A6.4), pour aboutir à une équation différentielle (éq A6.5). La formulation utilisant  $J(u)$  est dite globale et celle utilisant l'équation A6.5 est dite locale. L'existence d'un principe variationnel pour un problème physique donné n'est pas assuré, c'est pour cela que la formulation variationnelle du problème est considérée comme plus fondamentale et sert plus généralement de base pour introduire une discrétisation par éléments finis.



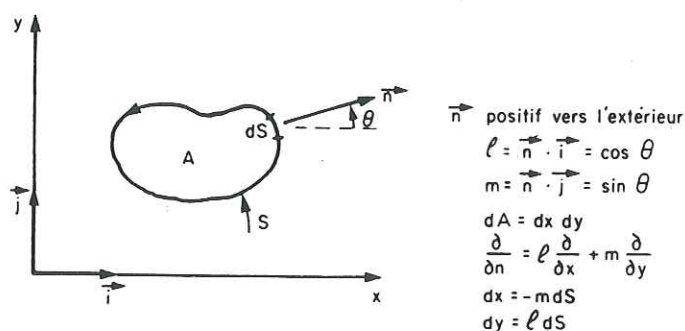
A6

**TRANSFORMATION DES FORMES  
INTEGRALES**

## TRANSFORMATION DES FORMES INTEGRALES

La méthode des éléments finis passe systématiquement par une formulation intégrale. Les formes intégrales obtenues sont définies sur un élément  $V_e$ , et seront transformées pour être calculées sur un élément de référence  $V_r$ , afin soit d'utiliser des formules d'intégration numérique standards, soit de minimiser le nombre de calculs à effectuer. De plus, on peut procéder à des intégrations par parties pour abaisser les contraintes imposées aux fonctions. Les formules présentées sont tirées de l'ouvrage de Dhatt et Touzot [27].

Donnons tout d'abord les formules d'intégration par parties en deux et trois dimensions:



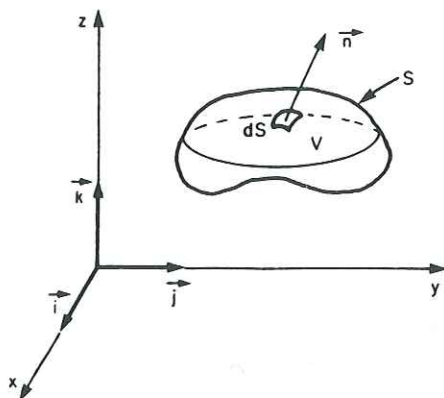
$$\begin{aligned} \int_A \psi \frac{\partial u}{\partial y} dx dy &= - \int_A \frac{\partial \psi}{\partial y} u dx dy - \oint_S \psi u dx \\ &= - \int_A \frac{\partial \psi}{\partial y} u dx dy + \oint_S \psi u m dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_A \psi \frac{\partial u}{\partial x} dx dy &= - \int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} u dx dy + \oint_S \psi u dy \\ &= - \int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} u dx dy + \oint_S \psi u \ell dS \end{aligned}$$



$$\int_V \psi \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz = - \int_V \frac{\partial \psi}{\partial x} u dx dy dz + \oint_S \psi u / dS.$$

185



$\vec{n}$  positif vers l'extérieur

$$\ell = \vec{n} \cdot \vec{i}$$

$$m = \vec{n} \cdot \vec{j}$$

$$n = \vec{n} \cdot \vec{k}$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \ell \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z}$$

$$dx dy = n dS$$

$$dy dz = \ell dS$$

$$dx dz = m dS$$

Au cours de l'exposé du paragraphe (IV.c) il est apparu deux types d'intégrales sur le domaine élémentaire : des intégrales considérées sur le volume du domaine et d'autres sur sa frontière.

Pour les premières on a la formule générale :

$$\int_{V^e} \dots dV = \int_{V^r} \dots \det(J) d\xi d\eta d\zeta.$$

Les applications pour les éléments classiques donnent :

Deux dimensions

Triangle  $\int_{\xi=0}^{\xi=1} \int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \dots \det(J) d\eta d\xi$

Quadrilatère  $\int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \dots \det(J) d\eta d\xi$

Trois dimensions

Tétraèdre  $\int_{\xi=0}^{\xi=1} \int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \int_{\zeta=0}^{\zeta=1-\xi-\eta} \dots \det(J) d\zeta d\eta d\xi$

Hexaèdre  $\int_{\xi=-1}^{\xi=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \int_{\zeta=-1}^{\zeta=1} \dots \det(J) d\zeta d\eta d\xi.$

Prisme  $\int_{\xi=0}^{\xi=1} \int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \int_{\zeta=-1}^{\zeta=1} \dots \det(J) d\zeta d\eta d\xi$

Pour les secondes on distingue :

# les intégrales curvilignes à deux ou trois dimensions

L'intégrale

$$I = \int_S \dots dS$$

s'écrit en fonction d'une abscisse curviligne  $s$  sur la courbe  $S$

$$I = \int_{s_1}^{s_2} \dots J_S ds.$$

L'abscisse  $s$  est en général l'une des variables  $\xi$ ,  $\eta$  ou  $\zeta$ . La courbe  $S$  correspond à l'un des côtés ou arêtes de l'élément de référence sur lequel un point est défini par le paramètre  $s$

$$x = \langle N(s) \rangle \{ x_n \} \quad \text{etc.}$$

$$J_S = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}.$$

# les intégrales de surface à trois dimensions

L'intégrale

$$\int_S \dots dS$$

s'écrit en fonction de coordonnées de surface  $s_1$  et  $s_2$  qui sont en général  $(\xi, \eta)$  ou  $(\xi, \zeta)$  ou  $(\eta, \zeta)$  :

$$\int_S \dots J_S ds_1 ds_2.$$

La surface  $S$  est l'une des faces de l'élément de référence. Sur cette face un point est repéré par les deux paramètres  $s_1$  et  $s_2$

$$x = \langle N(s_1, s_2) \rangle \{ x_n \} \quad \text{etc.}$$

$$J_S = \sqrt{(y_{,s_1} z_{,s_2} - z_{,s_1} y_{,s_2})^2 + (z_{,s_1} x_{,s_2} - x_{,s_1} z_{,s_2})^2 + (x_{,s_1} y_{,s_2} - y_{,s_1} x_{,s_2})^2}.$$

A7

## INTEGRATION NUMERIQUE DE GAUSS



## INTEGRATION NUMERIQUE DE GAUSS

Les intégrales introduites par la méthode des éléments finis ne sont que rarement calculables analytiquement, on doit donc avoir recours à des intégrations numériques. Il en existe deux sortes : l'intégration de Newton-Côtes (un aperçu en a été donné dans le sous-paragraphe (IV.b.β)), et l'intégration de Gauss. Il n'est pas dans mon propos d'en faire un exposé, pour cela on pourra consulter [25], mais de fournir les éléments de base pour pouvoir se servir des formules présentées dans la suite. Le premier type de méthode est très simple mais présente le désavantage de nécessiter un maillage fin de l'élément si l'on veut espérer une bonne précision de l'intégration. C'est pour cela que le choix de méthode se porte systématiquement sur l'intégration de Gauss. Elle permet d'intégrer exactement des polynômes de degré  $m \leq 2r-1$  avec seulement  $r$  points d'intégration. Sa mise en oeuvre nécessite de déterminer simultanément les coordonnées des points  $(\xi_i)_{i=1,r}$  et les poids  $(w_i)_{i=1,r}$  d'intégration. La formule d'approximation s'écrit :

$$\int_{V_{ref}} f(\vec{\xi}) d\vec{\xi} = \sum_{i=1}^r w_i f(\vec{\xi}_i) \quad (A7.1)$$

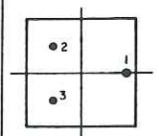
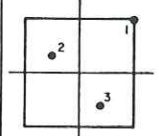
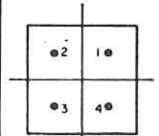
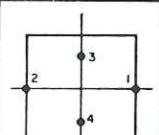
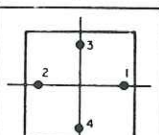
Pour certains éléments (quadrilatère, cube) il est possible d'utiliser une formule "produit" qui consiste à calculer la somme précédente en utilisant une intégration à une dimension mais en "balayant toutes les dimensions de l'élément. Dans la suite je fournis un ensemble de tableaux (tirés de [27]) donnant les valeurs numériques des points et des poids.

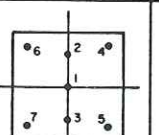
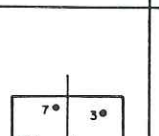
# intégration à une dimension :

$r$	$\xi_i$	$w_i$	Erreur	Degré maximum des polynômes intégrés exactement
1	0	2	$\frac{1}{6} \frac{d^2 y}{d\xi^2}$	1
2	$\pm 0,57735\ 02691\ 89626 (\pm 1/\sqrt{3})$	1	$\approx 0,7 \times 10^{-2} \frac{d^4 y}{d\xi^4}$	3
3	0 $\pm 0,77459\ 66692\ 41483 (\pm \sqrt{3/5})$	0,88888 88888 88889 (8/9) 0,55555 55555 55556 (5/9)	$\approx 0,6 \times 10^{-4} \frac{d^6 y}{d\xi^6}$	5
4	$\pm 0,33998\ 10435\ 84856 \left( \pm \sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}} \right)$ $\pm 0,86113\ 63115\ 94053 \left( \pm \sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}} \right)$	$0,65214\ 51548\ 62546 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{6/5}} \right)$ $0,34785\ 48451\ 37454 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{6/5}} \right)$	$\approx 0,3 \times 10^{-6} \frac{d^8 y}{d\xi^8}$	7

$r$	$\xi_i$	$w_i$	Erreur	Degré maximum des polynômes intégrés exactement
5	0 $\pm 0,53846\ 93101\ 05683 \left( \pm \frac{1}{3} \sqrt{5-4\sqrt{5/14}} \right)$ $\pm 0,90617\ 98459\ 38664 \left( \pm \frac{1}{3} \sqrt{5+4\sqrt{5/14}} \right)$	0,56888 88888 88889 (128/225) $0,47862\ 86704\ 99366 \left( \frac{161}{450} + \frac{13}{180\sqrt{5/14}} \right)$ $0,23692\ 68850\ 56189 \left( \frac{161}{450} - \frac{13}{180\sqrt{5/14}} \right)$	$\approx 0,8 \times 10^{-9} \frac{d^{10} y}{d\xi^{10}}$	9
6	$\pm 0,23861\ 91860\ 83197$ $\pm 0,66120\ 93864\ 66265$ $\pm 0,93246\ 95142\ 03152$	0,46791 39345 72691 0,36076 15730 48139 0,17132 44923 79170	$\approx 1,5 \times 10^{-12} \frac{d^{12} y}{d\xi^{12}}$	11
7	0 $\pm 0,40584\ 51513\ 77397$ $\pm 0,74153\ 11855\ 99394$ $\pm 0,94910\ 79123\ 42759$	0,41795 91836 73469 0,38183 00505 05119 0,27970 53914 89277 0,12948 49661 68870	$\approx 2,1 \times 10^{-15} \frac{d^{14} y}{d\xi^{14}}$	13

# intégration à deux dimensions :

	Ordre $m$	Nombre de points $r$	Coordonnées $\xi_i, \eta_i$	Poids $w_i$
	2	3	$\sqrt{2/3}$ 0 $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	4/3 4/3
	2	3	1 1 $-5/9$ $2/9$ $1/3$ $-2/3$	4/7 27/14 3/2
	3	4 (Méthode produit à 2 x 2 points)	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
	3	4	$\pm 1$ 0 0 $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	2/3 4/3
	3	4	$\pm \sqrt{2/3}$ 0 0 $\pm \sqrt{2/3}$	1

	Ordre $m$	Nombre de points $r$	Coordonnées $\xi_i, \eta_i$	Poids $w_i$
	5	7	0 0 0 $\pm \sqrt{14/15}$ $\pm \sqrt{3/5}$ $\pm \sqrt{3/5}$	8/7 20/63 20/36
	5	7	0 0 $-r$ $-r$ $+r$ $+r$ $+s$ $-t$ $-s$ $+t$ $+t$ $-s$ $-t$ $+s$ $r = \sqrt{7/15}$ $\approx 0,683$ $s = \sqrt{\frac{7+\sqrt{24}}{15}}$ $\approx 0,89$ $t = \sqrt{\frac{7-\sqrt{24}}{15}}$ $\approx 0,374$	8/7 100/168 20/48



	Ordre $m$	Nombre de points $r$	Coordonnées		Poids $w_i$
			$\xi_i$	$\eta_i$	
	1	1	1/3	1/3	1/2
	2	3	1/2 0 1/2	1/2 1/2 0	1/6
	2	3	1/6 2/3 1/6	1/6 1/6 2/3	1/6
	3	4	1/3 1/5 3/5 1/5	1/3 1/5 1/5 3/5	- 27/96 25/96

	Ordre $m$	Nombre de points $r$	Coordonnées		Poids $w_i$
			$\xi_i$	$\eta_i$	
	4	6	$a$ $1-2a$ $a$ $b$ $1-2b$ $b$	$a$ $a$ $1-2a$ $b$ $b$ $1-2b$	$\left. \begin{array}{l} 0,111690794839005 \\ 0,054975871827661 \end{array} \right\}$
	5	7	$\frac{1}{3}$ $a$ $1-2a$ $a$ $b$ $1-2b$ $b$	$\frac{1}{3}$ $a$ $1-2a$ $a$ $b$ $b$ $1-2b$	$\left. \begin{array}{l} \frac{9/80}{155 + \sqrt{15}} \\ A = \frac{155 + \sqrt{15}}{2400} \\ = 0,0661970763942530 \\ \frac{31}{240} - A = \\ = 0,0629695902724135 \end{array} \right\}$
	6	12	$a$ $1-2a$ $a$ $b$ $1-2b$ $b$ $c$ $d$ $1-(c+d)$ $1-(c+d)$ $c$ $d$	$a$ $a$ $1-2a$ $b$ $b$ $1-2b$ $c$ $d$ $c$ $d$ $1-(c+d)$ $1-(c+d)$	$\left. \begin{array}{l} 0,025422453185103 \\ 0,058393137863189 \\ 0,041425537809187 \end{array} \right\}$

A8

## SOLUTIONS SINGULIERES EN COORDONNEES CARTESIENNES

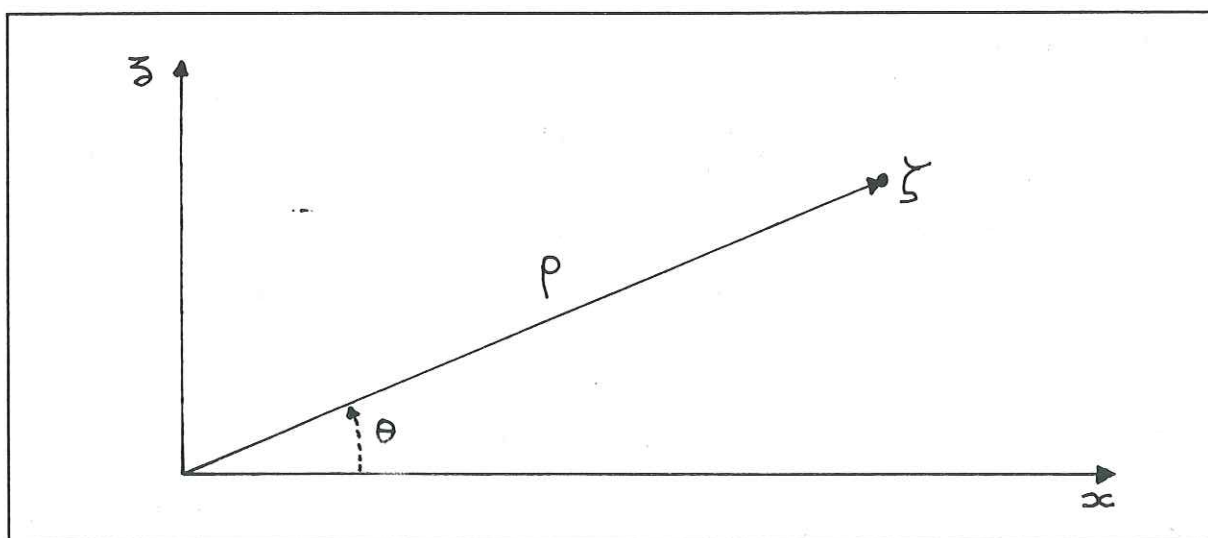
### SOLUTIONS SINGULIERES EN COORDONNEES CARTESIENNES

On rappelle tout d'abord les formes analytiques des solutions singulières exprimées avec la variable complexe  $\zeta = x + iz$  :

$$\begin{cases} U_{sing} + i W_{sing} = 3 \bar{\zeta}^{1/2} + 2 \zeta^{1/2} - \zeta \bar{\zeta}^{-1/2} \\ U_{sing} - i W_{sing} = 3 \zeta^{1/2} + 2 \bar{\zeta}^{1/2} - \bar{\zeta} \zeta^{-1/2} \\ P_{sing} = -2\mu (\zeta^{-1/2} + \bar{\zeta}^{-1/2}) \\ \Sigma_{sing} = \mu \frac{i}{2} (3 \zeta^{-1/2} - 3 \bar{\zeta}^{-1/2} + \bar{\zeta} \zeta^{-3/2} - \zeta \bar{\zeta}^{-3/2}) \end{cases} \quad (A8.1)$$

a) expressions en coordonnées cartésiennes de diverses puissances de  $\zeta$

La figure ci-dessous va nous permettre de situer le repère cartésien ainsi que  $\zeta$  et les coordonnées polaires locales :





$\rho$  est égal à  $\sqrt{(x^2+z^2)}$ . On aura remarqué que par suite de la géométrie utilisée  $\theta \in [0, \pi]$ . Donnons tout d'abord quelques rappels de calcul avec les nombres complexes :

1) si  $\zeta = x + iz$  alors son complexe conjugué est  $\bar{\zeta} = x - iz$  (en notation cartésienne). En notation complexe on a :  $\zeta = \rho (\cos\theta + i \sin\theta) = \rho e^{i\theta} = [\rho, \theta]$ . Cette dernière notation est très pratique pour les calculs des puissances d'un nombre complexe. Comme exemple calculons la racine carrée de  $\zeta$ . On recherche  $Z$  tel que  $Z^2 = \zeta$ , cela donne  $[r, \alpha]^2 = [r^2, 2\alpha] = [\rho, \theta]$ . Les règles de calcul sur les complexes donnent :  $r = \sqrt{\rho}$  et  $\alpha = \theta/2 + k\pi$  avec  $k = 0$  ou  $1$ . Si on développe ces deux racines on obtient :  $\sqrt{\rho} (\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2))$  et  $-\sqrt{\rho} (\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2))$ . Avec  $\theta$  compris entre  $0$  et  $\pi$  la première racine est contenue dans le demi-plan positif, c'est donc elle qu'on prendra. Néanmoins le travail n'est pas terminé car il faut l'exprimer en fonction de  $x$  et  $z$ , c'est-à-dire convertir les quantités en  $\theta/2$  en quantités en  $\theta$ . On utilise des formules trigonométriques classique l'angle à l'angle moitié. finalement on obtient :

$$\zeta^{1/2} = \left( \frac{\sqrt{x+\rho}}{\sqrt{2}} \right) + i \left( \frac{\sqrt{-x+\rho}}{\sqrt{2}} \right) \quad (\text{A8.2})$$

On procède de la même façon pour  $\zeta^{3/2}$ , ce qui donne :

$$\zeta^{3/2} = \left( \frac{\sqrt{\tilde{x}+\tilde{\rho}}}{\sqrt{2}} \right) + i \left( \frac{\sqrt{-\tilde{x}+\tilde{\rho}}}{\sqrt{2}} \right) \quad (\text{A8.3})$$

$$\text{où : } \tilde{x} = x^3 - 3xz^2, \tilde{z} = -z^3 + x^2z \text{ et } \tilde{\rho} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2}$$

Il nous reste à donner les expressions des inverses de ces racines qui sont obtenue

par des calculs ordinaires :

$$\zeta^{-1/2} = \left( \frac{\sqrt{x+\rho}}{\rho\sqrt{2}} \right) - i \left( \frac{\sqrt{-x+\rho}}{\rho\sqrt{2}} \right) \quad (\text{A8.4})$$

$$\zeta^{-3/2} = \left( \frac{\sqrt{\tilde{x}+\tilde{\rho}}}{\tilde{\rho}\sqrt{2}} \right) - i \left( \frac{\sqrt{-\tilde{x}+\tilde{\rho}}}{\tilde{\rho}\sqrt{2}} \right) \quad (\text{A8.5})$$

Venons en maintenant aux calculs effectifs des solution singulières.

#### b) Calcul de $U_{\text{sing}}$

On tire  $U_{\text{sing}}$  en additionnant les deux premières équations de (1), ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} U_{\text{sing}} &= \frac{1}{2} (5\zeta^{1/2} + 5\bar{\zeta}^{1/2} - \bar{\zeta}\zeta^{-1/2} - \zeta\bar{\zeta}^{-1/2}) \\ &= 5\Re_e(\zeta^{1/2}) - \Re_e(\bar{\zeta}\zeta^{-1/2}) \\ &= (5\sqrt{x+\rho} - \frac{x}{\rho}\sqrt{x+\rho} + \frac{z}{\rho}\sqrt{-x+\rho}) / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (\text{A8.6})$$

#### c) Calcul de $W_{\text{sing}}$

En soustrayant les deux premières équations de (1) on a :

$$\begin{aligned} W_{\text{sing}} &= \frac{1}{2i} (\bar{\zeta}^{1/2} - \zeta^{1/2} + \bar{\zeta}\zeta^{-1/2} - \zeta\bar{\zeta}^{-1/2}) \\ &= -\Im_m(\zeta^{1/2}) + \Im_m(\bar{\zeta}\zeta^{-1/2}) \\ &= -(\sqrt{-x+\rho} + \frac{x}{\rho}\sqrt{-x+\rho} + \frac{z}{\rho}\sqrt{x+\rho}) / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (\text{A8.7})$$

d) Calcul de  $P_{sing}$

$$\begin{aligned} P_{sing} &= -4 \mu \Re_e(\zeta^{-1/2}) \\ &= -4 \mu \frac{\sqrt{x+p}}{\rho \sqrt{2}} \end{aligned} \quad (A8.8)$$

e) Calcul de  $\Sigma_{sing}$

$$\begin{aligned} \Sigma_{sing} &= -\mu (3 \Im_m(\zeta^{-1/2}) + \Im_m(\bar{\zeta} \zeta^{-3/2})) \\ &= \mu \left( \frac{3}{\rho} \sqrt{-x+p} + \frac{x}{\tilde{\rho}} \sqrt{-\tilde{x}+\tilde{\rho}} + \frac{z}{\tilde{\rho}} \sqrt{\tilde{x}+\tilde{\rho}} \right) / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (A8.9)$$

f) Représentation graphiques des solutions singulières

Les graphes sont faits avec :

$x \in [-20000, +20000]$  ,  $z \in [0, 850]$  pour les deux vitesses (A8.1 et A8.2).

$x \in [-20, +20]$  ,  $z \in [0, 1]$  pour la pression (A8.3) et le cisaillement (A8.4).

La viscosité  $\mu$  est prise à  $10^5$  Pa.an .

## VITESSE HORIZONTALE

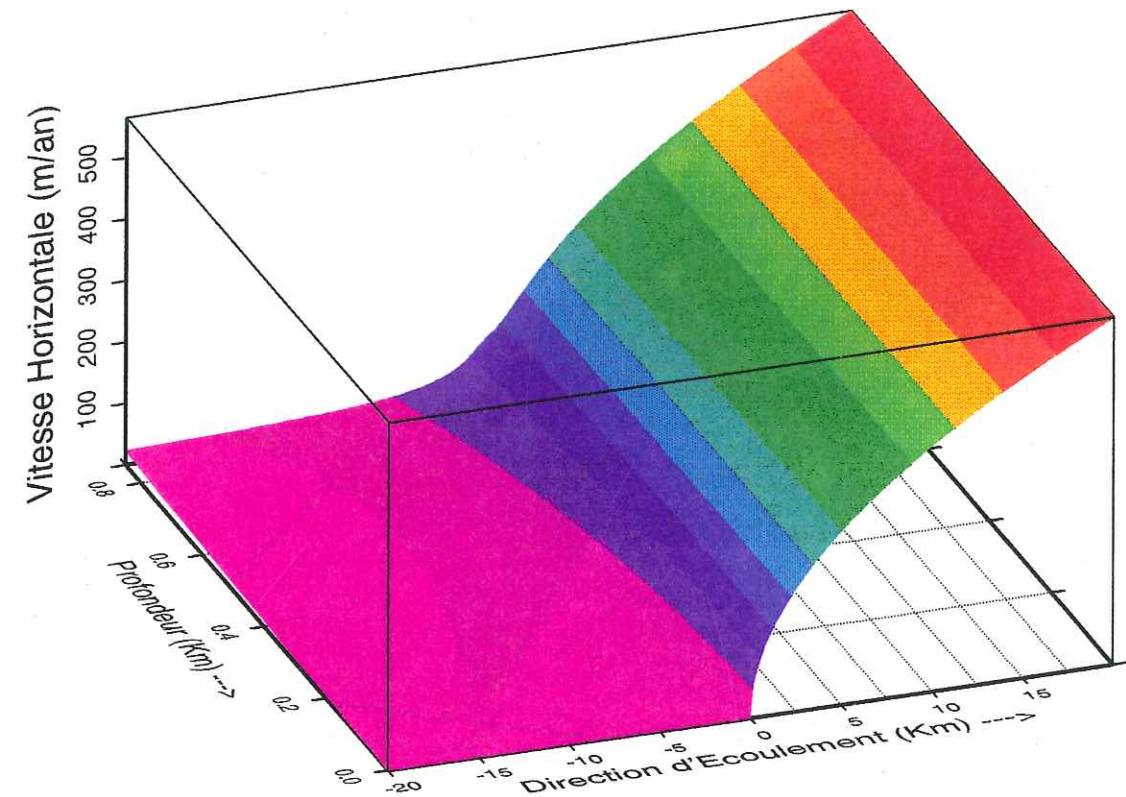


Fig. A8.1 : Vitesse horizontale singulière théorique



## VITESSE VERTICALE

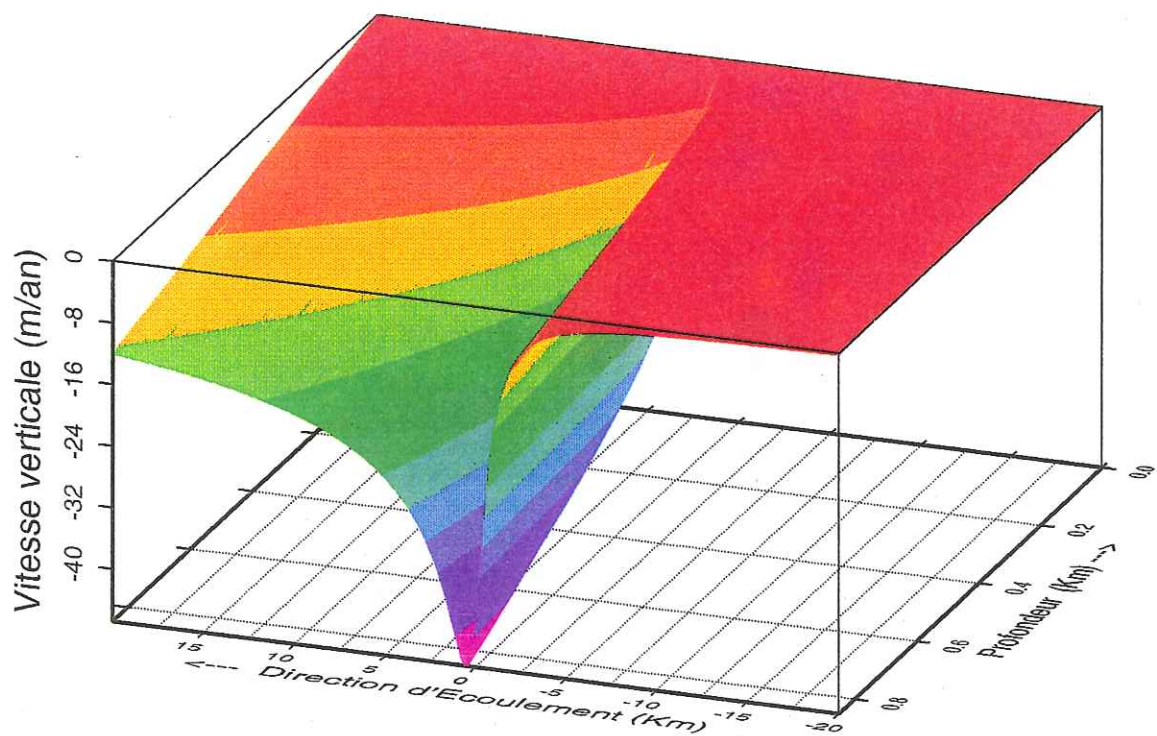


Fig. A8.2 : Vitesse verticale singulière théorique

# PRESSION

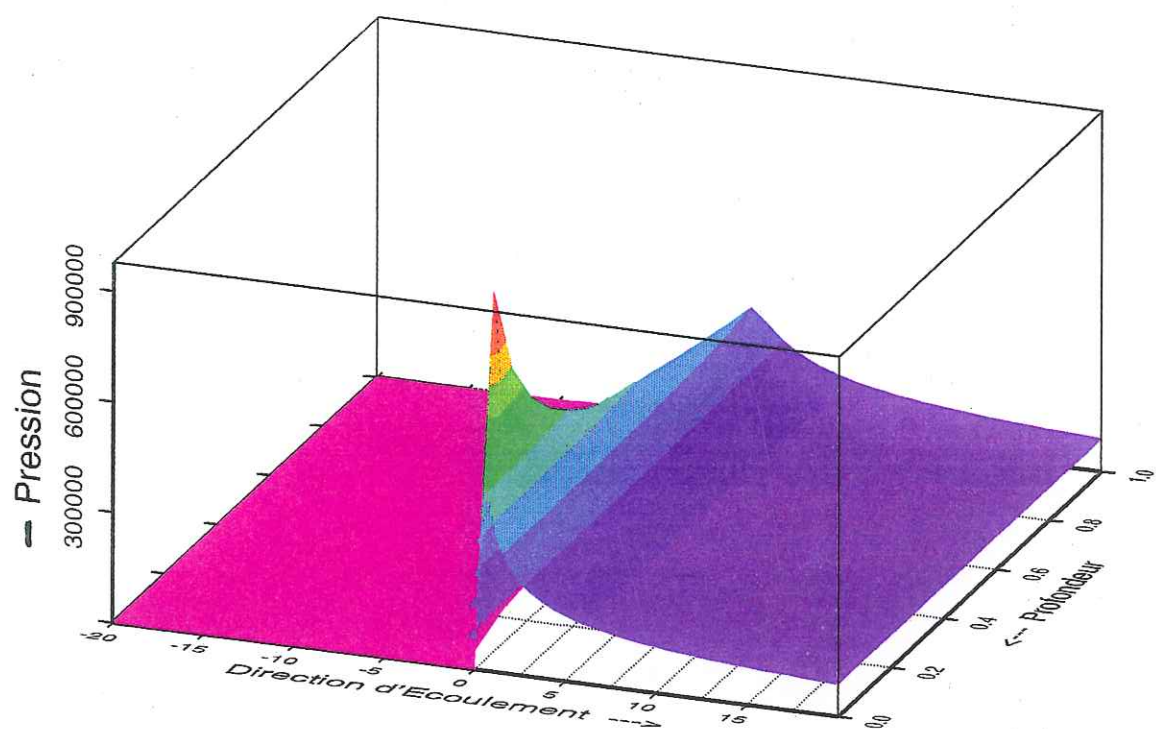


Fig. A8.3 : Pression théorique.



## CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

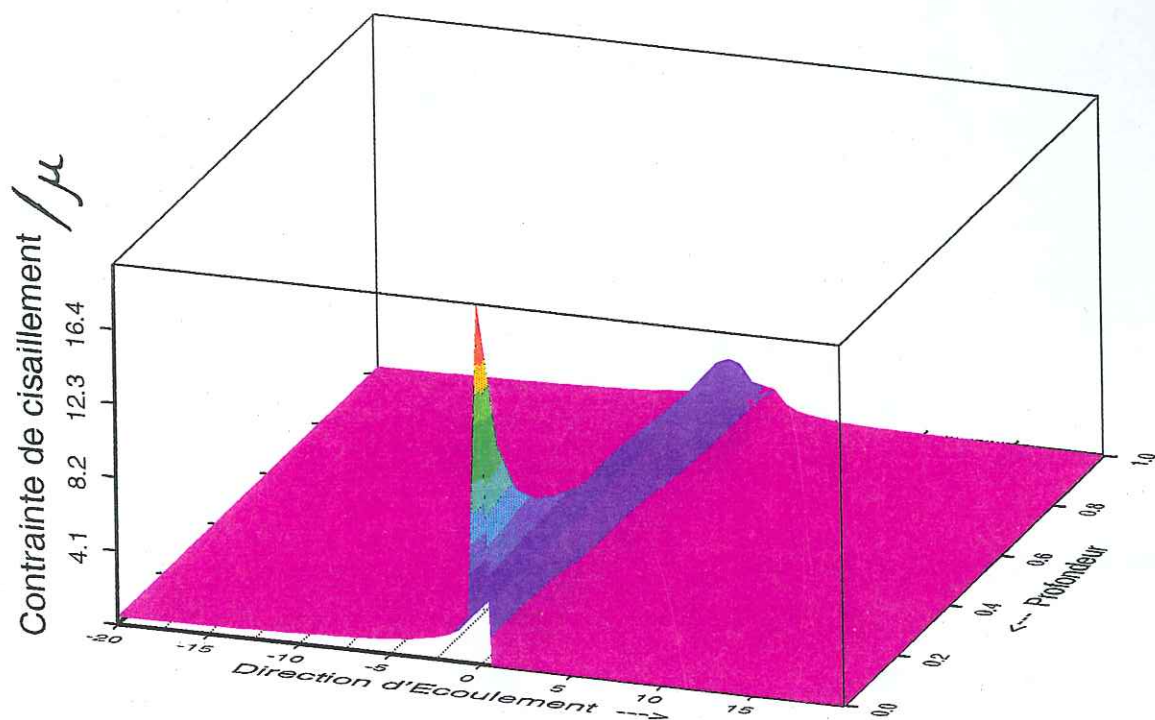


Fig. A8.4 : Contrainte de cisaillement théorique.

A9

**SENSIBILITE DES SOLUTIONS  
NUMERIQUES A LA DENSITE  
DU MAILLAGE**



**SENSIBILITE DES SOLUTIONS NUMERIQUES  
A LA DENSITE DU MAILLAGE**

Cette annexe est consacrée à la l'inter-comparaison des solutions numériques d'un des problèmes abordés dans la thèse pour deux densités de maillages différentes. Le maillage est caractérisé par le nombre de noeuds de vitesse dans la dimension verticale (noté  $N_n$ ) et dans la dimension horizontale (noté  $2*N_b+1$ ). Le problème considéré est celui de la transition "calotte - ice shelf" avec condition d'adhérence sur le socle (IV,b, $\alpha$ ).

Les maillages utilisés pour ce test sont les suivant :

- $N_n = 5$  et  $N_b = 20$  (figure A9.1)
- $N_n = 11$  et  $N_b = 400$  (figure A9.2)

On pourra constater que l'effet de maillage n'existe pratiquement pas.

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**  
**ET**  
**BIBLIOGRAPHIE**



### Références bibliographiques

- [1] Ritz C., 1993. Un modèle thermo-mécanique d'évolution pour le bassin glaciaire antarctique Vostok - Glacier Byrd : sensibilité aux valeurs des paramètres mal connus. Thèse de Doctorat d'Etat. Laboratoire de Glaciologie et de Géophysique de l'Environnement, Grenoble, France.
- [2] Huybrechts P., 1992. The Antarctic ice sheet and environmental change : a three-dimensional study. Reports on Polar Research, 99/92. Alfred-Wigener-Institut für Polar und Meeresforschung, Bremerhaven, Bundesrepublik Deutschland.
- [3] Herterich K., 1987. On the flow within the transition zone between ice sheet and ice shelf. in Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet, p 185-202. Edited by C. J. van der Veen and J. Oerlemans.
- [5] Krauss W., 1973. Methods and results of theoretical oceanography ; Part I : dynamics of the homogeneous and the quasihomogeneous ocean. Gebrüder Borntraeger. Berlin. p 45-48.
- [6] Truesdell C. and Toupin R., 1965. The classical field theories. In Handbuch der Physik, III/1, p 492-525. Edited by Flügge, Springer-Verlag, Berlin.
- [7] Glen J.W., 1955. The creep of polycrystalline ice. Proc. R. Soc. A, 363: p 519-538.
- [8] Paterson W.S.B., 1985. Flow law for ice in polar ice sheets. Nature Vol. 318, 7, p 82-83.
- [9] Doake C.S.M., Wolff E.W., 1985. Flow law for ice in polar ice sheets. Nature Vol. 314, 21, p 255-257.
- [10] Doake C.S.M., Wolff E.W., 1985. Flow law for ice in polar ice sheets. Nature Vol. 318, 7, p 83.
- [11] Weertman J., 1985. Unsolved problems of creep. Nature Vol. 314, 21, p 227.
- [12] Weertman J., Blacic J., 1984. Harper-Dorn creep : an artifact of low-amplitude temperature cycling ? Geophysical Research Letter, Vol. 11, 2, p 117-120.

- [13] Jezek K.C., Alley R.B., Thomas R.H., 1985. Rheology of glacier ice. *Science* Vol 227, p 1335-1337.
- [14] Alley R.B., 1992. Flow-law hypotheses for ice-sheet modeling. *Journal of Glaciology*, Vol 38, 129, p 245-256.
- [15] Mellor M., Testa R., 1969. Creep of ice under low stress. *Journal of Glaciology*, Vol 8, 52, p 147-152.
- [16] Thomas R.H., 1973. The creep of ice shelves : interpretation of observed behaviour. *Journal of Glaciology*, Vol 12, 64, p 55-70.
- [17] Paterson W.S.B., 1983. Deformation within polar ice sheets : an analysis of the Byrd Station and Camp Century borehole-tilting measurements. *Cold Regions Science and Technology*, 8, p 165-179.
- [18] Hooke R LeB., 1981. Flow law for polycrystalline ice in glacier : comparison of theoretical predictions, laboratory data, and field measurements. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, Vol 19, 4, p 664-672.
- [19] Lliboutry L., Duval P., 1985. Various isotropic and anisotropic ices found in glaciers and polar ice caps and their corresponding rheologies. *Annales Geophysicae*, Vol 3, 2, p 207-224.
- [20] Pimienta P., 1987. Etude du comportement mecanique des glaces polycristallines aux faibles contraintes ; applications aux glaces des calottes polaires. Thèse de Doctorat de l'U.S.T.M.G. -mention mécanique.
- [21] Weertman J., 1983. Creep deformation of ice. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, Vol 11, p 215-240.
- [22] Budd W.F., Jacka T.H., 1989. A review of ice rheology for ice sheet modelling. *Cold Regions Science and Technology*, Vol 16, p 107-144.
- [23] Smith G.D and Morland L. W., 1981. Viscous relations for the steady creep of polycrystalline ice. *Cold Reg. Sci. Tech.*, 5: p 141-150.
- [24] Morland L.W. and Shoemaker E.M., 1982. Ice shelf balance. *Cold Reg. Sci. Tech.*, 5: p 235-251.
- [25] Théodor R., 1985. Initiation aux méthodes numériques. CNAM
- [26] Ciarlet P.G., 1989. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson.



- [27] Dhatt G. and Touzot G., 1984. Une présentation de la méthode des éléments finis. Maloine S.A Editeur, Paris.
- [28] Hood P. and Taylor G., 1974. Navier-Stokes equations using mixed interpolations. Finite Element Method in flow problems. Oden editor, UAH Press.
- [29] Crouzeix M. et Raviart P.-A., 1973. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I. R.A.I.R.O., décembre, R-3, p 33-76.
- [30] Glowinski R. and Pironneau O., 1979. On a mixed finite element approximation of the Stokes problem (I). Convergence of the approximate solutions. Numer. Math. 33, p 397-424.
- [31] Bercovier M. and Pironneau O., 1979. Error estimates for finite element method solution of the Stokes problem in primitive variables. Numer. Math., 33, p 221-224.
- [32] Babuška I., 1971. Error bounds for finite element method. Numer. Math., 16, p 322-333.
- [33] Babuška I., 1973. The finite element method with lagrange multipliers. Numer. Math., 20, p 179-192.
- [34] Gunzburger M.D., 1990. Finite element methods for viscous incompressible flows: a guide to theory, practice, and algorithms. Academic Press Inc. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers.
- [35] Reddy J.N., 1984. An introduction to the finite element method. Mac Graw-Hill.
- [36] Raviart P.-A. et Thomas J.M., 1983. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson.
- [37] Rood R.B., 1987. Numerical advection algorithms and their role in atmospheric transport and chemistry models. Reviews of Geophysics, vol 25, No 1, p 71-100.
- [38] Le Pourhuit A., 1988. Résolution numérique des équations aux dérivées partielles : une première approche. Cepadues-Editions.

- [39] Nye J.F., 1965. The flow of a glacier in a channel of rectangular, elliptic or parabolic cross-section. J. Glaciol., p 661-690.
- [40] Raymond C.F., 1983. Deformation in the vicinity of ice divides. J. Glaciol., 29(103), p 357-373.
- [41] Lee L., Gresho P.M., Sani R.L., 1979. Smoothing techniques for certain primitive variable solutions of the Navier-Stokes equations. Int. J. Num. Meth. Eng., 14, p 1785-1804.
- [42] Barcilon V. and MacAyeal D., 1993. Steady flow of a viscous ice stream across a no-slip/free-slip transition at the bed. J. Glaciol., vol. 39 No 131, p 167-185.
- [43] Costabel M. et Dauge M., 1993. Construction of corner singularities for Agmon-Douglis-Nirenberg elliptic systems. Math. Nachr., 162, p 209-237.
- [44] Grisvard P., 1985. Elliptic problems in nonsmooth domains. Monographs and studies in mathematics 24. Pitman.
- [45] Dauge M., 1988. Elliptic boundary value problems on corner domains. Lecture notes in mathematics 1341. Edited by Dold A. and Eckmann B. Springer-Verlag.
- [46] Dauge M., 1986. Régularités et singularités des solutions de problèmes aux limites elliptiques sur des domaines singuliers de type à coins. Thèse d'état. Nantes, France.
- [47] Dauge M., 1987. Problèmes aux limites elliptiques sur des domaines à coins. C. R. Acad. Sc Paris, 304, Série I, trois parties : 17, 18, 19.
- [48] Dauge M., 1989. Stationary Stokes and Navier-Stokes systems on two- or three-dimensional domains with corners. Part 1 : linearized equations. SIAM J. Math. Anal., vol 20, No 1.
- [49] Stephenson S.N., 1984. Glacier flexure and the position of the grounding lines : measurements by tiltmeter on Rutford Ice Stream, Antarctica. Annals Glaciol., 5, p 165-169.
- [50] Smith A.M., 1991. The use of tiltmeters to study the dynamics of Antarctic ice shelf grounding lines. J. Glaciol., 37(125), p 51-58.
- [51] Vaughan D.G. Investigating tidal flexure on an ice shelf using kinematic GPS. à paraître dans Annals of Glaciology No 20.



- [52] Hindmarsh R.C.A., 1992. Qualitative dynamics of marine ice sheets. in Ice in the Climate System. Peltier and Oerlemans J. eds., NATO ARW.
- [53] Zeid I., 1985. Fixed-point iteration to nonlinear finite element analysis. Part I : mathematical theory and background. Int. J. Num. Meth. Eng., 21, p 2027-2048.
- [54] Zeid I., 1985. Fixed-point iteration to nonlinear finite element analysis. Part II : formulation and implementation. Int. J. Num. Meth. Eng., 21, p 2027-2048.

**Bibliographie**

*Pour commencer cette rubrique, je donne un certain nombre de référence sur les aspects pratiques de la méthode des éléments finis pour les fluides :*

- Norrie D.H. and de Vries G., 1978. A survey of the finite element applications in fluid mechanics. in Finite Elements in Fluids. Gallagher and al. eds., John Wiley & Sons. Vol 3, p 363-396.
- Thompson E.G. and Haque M.I., 1973. A high order finite element for completely incompressible creeping flow. Int. J. Num. Meth. Eng., 14, p 315-321.
- Thompson E.G., 1975. Average and complete incompressibility in the finite element method. Int. J. Num. Meth. Eng., 9, p 925-932.
- Jackson C.P. and Cliffe K.A., 1981. Mixed interpolation in primitive variable finite element formulations for incompressible flow. Int. J. Num. Meth. Eng., 17, p 1659-1688.
- Hood R.L., Gresho P.M., Sani R.L., 1974. Navier-Stokes equations using mixed interpolation. in Finite Element Method in Flow Problems. (Eds. Oden J.T., Zienkiewicz O.C., Gallagher R.H. and Taylor C.) U.A.H. press, Huntsville. p 121-132.
- Kawahara M., Yoshimura N., Nakagawa K., 1974. Analysis of steady incompressible viscous flow. Int. J. Num. Meth. Eng., 14, p 107-120.
- Kawahara M., Yoshimura N., Nakagawa K., Ohsaka H., 1976. Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid. Int. J. Num. Meth. Eng., 10, p 437-456.
- Sani R.L., Gresho P.M., Lee L., Griffiths D.F., 1981. The cause and the cure (?) of the spurious pressures generated by certain F.E.M. solutions of the incompressible Navier-Stokes equation : Part 1, Int. J. Num. Meth. Fluids, 1, p 17-43.



Engelman M.S., Sani R.L., Gresho P.M., 1982. The implementation of normal and/or tangential boundary conditions in finite element codes for incompressible fluid flow. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 2, p 225-238.

*Quelques thèses ont utilisé une loi viscoplastique du type "loi de Glen" (son autre dénomination est "loi de Norton-Hoff") :*

Meysonnier J., 1983. Ecoulement de la glace sur un lit de forme simple : expérience, modélisation, paramétrisation du frottement. Thèse de Docteur ès sciences physiques.

Pelissier M.C., 1975. Sur quelques problèmes non-linéaires en glaciologie. Publication mathématique d'Orsay, No 110 75-24.

Friaâ A., 1979. La loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité. Thèse de doctorat d'état ès sciences mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.

Frémond M., 1982. Méthodes variationnelles en calcul des structures. Ecole nationale des ponts et chaussées, ES 16D.

*un article à part :*

Finlayson B.A. and Scriven L.E., 1967. On the search for variational principles. *Int. J. Heat Mass Transfert*, vol. 10, p 799-821.

*Ensuite on donne une liste d'articles concernant l'analyse mathématique de la méthode des éléments finis appliquée aux fluides dans des cas non classiques :*

Girault V., 1988. Incompressible finite element methods for Navier-Stokes equations with non-standard boundary conditions in  $\mathbb{R}^3$ . *Mathematics of computation*, vol. 51, No 183, p 55-74.

Pironneau o., 1986. Conditions aux limites sur la pression pour les équations de Stokes. *C. R. Acad. Sc; Paris*, t 303, série I, No 9.

Verfürth R., 1985. Finite element approximation of steady Navier-Stokes equations with mixed boundary condition. *Modélisation mathématique et analyse numérique*, vol. 19, No 3, p 461-475.

Verfürth R., 1987. Finite element approximation of incompressible Navier-Stokes equations with slip boundary condition. *Numer. Math.*, 50, p 697-721.

Nédélec J.C., 1982. Eléments finis mixtes incompressibles pour l'équations de Stokes dans  $\mathbb{R}^3$ . *Numer. Math.* 39, p 97-112.

Fortin M., 1972. Approximation des fonctions à divergence nulle par la méthode des éléments finis. *Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf. Numer. Meth. in Fluid Mech.*, vol 1 (eds Cabannes H. and Temam R.), p 99-103.

*Pour terminer cette rubrique quelques livres :*

Germain P., 1962. *Mécanique des milieux continus*. Masson.

Hutter K., 1983. *Theoretical glaciology : material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets*. Mathematical approaches to geophysics. Reidel D. Publishing Company.

Adams R.A., 1975 *Sobolev spaces*. New York, Academic Press.

Temam R., 1977. *Navier-Stokes equations*. Amsterdam: North-Holland.

Ladyzhenskaia O., 1963. *The mathematical theory of viscous incompressible flows*. London: Gordon and Breach.

Strang G. and Fix G., 1973. *An analysis of the finite element method*. Prentice Hall, N.J.

Ciarlet P.G., 1978. *The finite element method for elliptic problems*. Amsterdam: North-Holland.

## **SOMMAIRE**



SOMMAIRE
----------

<b>Introduction</b>	7
<b>I) Problématique de l'étude</b>	13
<b>II) Description des équations des écoulements</b>	19
a) Présentation	20
b) Equations à résoudre	21
$\alpha$ ) <i>équations de la dynamique</i>	
$\beta$ ) <i>évolution des surfaces libres</i>	
c) Conventions d'écriture et de repères	23
d) Loi de comportement	24
<b>III) Les travaux de K. Herterich</b>	29
a) Les bases théoriques	30
b) Résultats et analyse	33
$\alpha$ ) <i>vitesse horizontale</i>	
$\beta$ ) <i>le cisaillement et la contrainte déviatorique longitudinale</i>	
$\gamma$ ) <i>vitesse verticale</i>	
c) Conclusion	37
<b>IV) Description des méthodes numériques employées</b>	38
a) Introduction générale	39
b) Que sont les éléments finis ?	41
$\alpha$ ) <i>l'interpolation de Lagrange à une dimension</i>	
$\beta$ ) <i>l'intégration numérique selon Newton-Cotes</i>	
$\gamma$ ) <i>domaine et sous-domaines</i>	
$\delta$ ) <i>régularisation par intégration</i>	
$\epsilon$ ) <i>principe et formulation variationnels</i>	
c) Résolution par éléments finis des équations de Stokes incompressibles et stationnaires à deux dimensions dans l'approche de Galerkin	50
$\alpha$ ) <i>discrétisation des équations</i>	
$\beta$ ) <i>choix des représentations polynomiales</i>	
$\gamma$ ) <i>conditions aux limites</i>	
d) Implémentation de la méthode des éléments finis	63
$\alpha$ ) <i>calculs des matrices élémentaires</i>	

	216
β) assemblage des matrices élémentaires	
γ) calcul des intégrales de volume	
δ) imposition des conditions aux limites essentielles	
ε) calcul des intégrales de surface	
ζ) résolution du système d'équations	
e) Extension au 3D	73
f) Extension au cas non-stationnaire	75
g) Traitement numérique de l'évolution des surfaces libres	79
h) Tests de validation des programmes	81
α) présentation	
β) écoulement de Poiseuille pour l'eau et la glace	
γ) écoulement de la "driven cavity"	
δ) écoulement dans un chenal rectangulaire	
ε) écoulement dans une diffluence de glace	
ζ) écoulement au-dessus d'une bosse	
η) écoulement de Poiseuille en 3D	
θ) écoulement dans un chenal rectangulaire en 3D	
ι) test de la méthode de calcul des gradients	
<b>V) La transition "adhérence - écoulement libre" à deux dimensions</b>	89
a) Introduction	90
b) Résultats principaux de l'étude de Barcion - MacAyeal	91
c) Simulation numérique du problème "adhérence - écoulement libre"	93
α) modélisation du problème	
β) comment lire les digrammes 3D	
γ) solution avec les conditions naturelles	
δ) solution avec les conditions mixtes	
ε) comparaison entre les deux tests	
ζ) test de validation	
η) sur la régularité du cisaillement	
d) Le cisaillement est-il borné ?	113
α) détection de la singularité par le programme	
β) élimination de la singularité par l'évolution de la surface libre	
γ) conclusion	
e) Conclusion générale de l'étude	128
<b>VI) La transition calotte - ice shelf à deux dimensions</b>	129
a) Introduction	130
b) La zone de transition idéalisée	131
α) simulation avec condition d'adhérence sur le socle	
β) simulation avec condition de glissement	
γ) pour aller plus loin	
c) Conclusion	151

	217
<b>VII) Etude préliminaire en 3D de la transition "adhérence - écoulement libre" en 3D</b>	152
a) Introduction	153
b) Modélisation du problème	153
α) présentation	
β) méthode numérique, conditions aux limites et résultat	
<b>VIII) Conclusions et perspectives</b>	156
<b>Annexes</b>	160
A1 : solution de l'écoulement de Poiseuille appliqué à la glace avec une viscosité suivant la loi de Smith et Morland	161
A2 : une méthode de point fixe pour résoudre les systèmes d'équations	166
A3 : conséquence de la violation de la condition de stabilité d'une paire de représentation vitesse-pression	170
A4 : continuité des contraintes pour une loi de Glen ; conditions aux limites sur une surface libre	173
A5 : relation entre un principe variationnel, une formulation variationnelle et une équation différentielle	179
A6 : transformation des formes intégrales	183
A7 : intégration numérique de Gauss	187
A8 : solutions singulières en coordonnées cartésiennes	192
A9 : sensibilité des solutions numériques à la densité du maillage	201
Références bibliographiques	205
Bibliographie	211



